MIRCEA RADEŞ

REZISTENȚA MATERIALELOR

I

Editura Printech
2004

Prefață

Lucrarea reprezintă cursul de Rezistența materialelor care se predă studenților anului IIA al facultății de Inginerie Mecanică, la Universitatea Politehnica Bucureşti. În ediția de față, partea teoretică depăşeşte materia predată efectiv la curs, în schimb numărul aplicațiilor a fost redus.

Tradițional, în prima parte a cursului se studiază bare şi sisteme de bare. Relațiile de calcul stabilite în Rezistența materialelor sunt strict valabile în cazul barelor cu secțiune compactă constantă, la care se adoptă ipoteza nedeformabilității secțiunii transversale. Ele pot fi extinse la corpuri cu variație mică şi monotonă a secțiunii în lungul axei longitudinale şi, cu anumite corecții privind concentrarea locală a tensiunilor, la bare cu secțiunea variabilă în trepte. În partea a doua a cursului se mai studiază tuburi axial-simetrice cu pereți groşi, discuri de grosime constantă în mişcare de rotație şi plăci plane subțiri. Studiul general al barelor cu pereți subțiri face obiectul unor cursuri diferite.

În lucrare se definesc eforturile secționale în bare, tensiunile şi deformațiile specifice, deformațiile şi deplasările punctelor corpurilor elastice. Se calculează variația eforturilor în lungul axei barelor şi se reprezintă grafic sub forma unor diagrame de eforturi. Barele sunt solicitate la întindere (compresiune), forfecare, încovoiere şi răsucire, fie separat, fie în diferite combinații. Se calculează distribuția tensiunilor normale şi tangențiale în secțiunea transversală, şi se determină punctele în care apar tensiunile maxime şi valorile acestora care se compară separat, sau combinate într-o tensiune normală echivalentă, cu rezistențele admisibile.

La rezolvarea problemelor static nedeterminate sunt necesare patru tipuri de relații: 1) ecuații de echilibru; 2) condiții de compatibilitate sau relații între deformații specifice şi deplasări; 3) ecuații constitutive sau relații între tensiuni şi deformații specifice; şi 4) condiții la limită, de rezemare sau de solicitare pe contur. Utilizarea acestora este menționată pentru fiecare tip de solicitare.

Cursul de Rezistența materialelor predat la facultățile cu profil mecanic îmbină noțiuni de Mecanica materialelor şi Teoria elasticității cu criterii de curgere şi teorii de rezistență, elemente de stabilitate elastică a barelor şi stări de tensiuni în corpuri axial-simetrice, calculul la solicitări dinamice şi oboseală, la solicitări în domeniul plastic.

Modificarea în timp a structurii cursului a fost determinată de utilizarea calculatoarelor, introducerea materialelor compozite, dezvoltarea mecanicii ruperii, a calculului la oboseală şi a metodei elementelor finite. Acestea au impus dezvoltarea unor metode noi pentru calculul proprietăților geometrice ale secțiunilor de formă oarecare, al deformațiilor arborilor cu secțiune variabilă şi al sistemelor static nedeterminate în general. Ca urmare, s-a introdus calculul tensiunilor în compozite stratificate armate cu fibre şi în bare cu secțiune eterogenă, metoda deplasărilor pentru calculul sistemelor de bare, calculul la oboseală la durată de viață limitată bazat pe metoda "deformație specifică - durabilitate", precum şi o descriere mai detaliată a caracteristicilor mecanice ale metalelor la solicitări monotone şi solicitări ciclice.

Cuprins

Prefață **1**

Cuprins **3**

1. Modelarea corpurilor deformabile **7**

1.1 Modelarea corpurilor 7

1.2 Modelarea sarcinilor 9

1.3 Modelarea reazemelor 11

1.4 Ipotezele rezistenței materialelor 12

2. Eforturi în bare **15**

2.1 Metoda secționării 15

2.2 Convenții de semne 16

2.3 Definiția eforturilor 17

2.4 Relații diferențiale de echilibru la bare drepte 20

2.5 Diagrame de eforturi la bare drepte 22

2.6 Diagrame de eforturi la bare cotite plane 29

2.7 Diagrame de eforturi la bare cotite spațiale 31

2.8 Relații diferențiale de echilibru la bare curbe plane 35

2.9 Diagrame de eforturi la bare curbe plane 36

3. Tensiuni şi deformații specifice **39**

3.1 Tensiuni 39

3.2 Convenții de semne pentru tensiuni 41

3.3 Relații între eforturi şi tensiuni 42

3.4 Sisteme de tensiuni static determinate 43

3.5 Deformații specifice 49
3.6 Relații între tensiuni şi deformații specifice 52

4. Caracteristici mecanice la încărcări monotone 53
4.1 Încercarea la tracțiune uniaxială 53
4.2 Contracția transversală 60
4.3 Tensiuni şi deformații specifice reale 61
4.4 Încercări la compresiune şi la forfecare 64
4.5 Efectul temperaturii şi vitezei de deformare 67
4.6 Rezistențe admisibile 67

5. Întinderea şi compresiunea barelor 69
5.1 Tensiuni şi deformații la întindere 69
5.2 Energia de deformație la întindere 71
5.3 Sisteme static nedeterminate 72
5.4 Concentrarea tensiunilor 81
5.5 Tensiuni pe o suprafață înclinată față de axa barei 84

6. Răsucirea barelor 91
6.1 Calculul momentului de răsucire 91
6.2 Tensiuni în bare de secțiune axial-simetrică 92
6.3 Caracteristicile geometrice Ip şi Wp 96
6.4 Deformații la răsucire 97
6.5 Energia de deformație la răsucire 98
6.6 Răsucirea barelor cu secțiune dreptunghiulară 99
6.7 Răsucirea profilelor deschise cu pereți subțiri 101
6.8 Răsucirea profilelor închise cu pereți subțiri 104
6.9 Calculul arcurilor cilindrice elicoidale 107
6.10 Sisteme static nedeterminate solicitate la răsucire 109
6.11 Concentrarea tensiunilor la răsucirea barelor 112

7. Proprietăți ale suprafețelor plane **119**

7.1 Momente statice ale suprafețelor plane 119

7.2 Momente de inerție ale suprafețelor plane 121

7.3 Variația momentelor de inerție cu translația axelor 126

7.4 Variația momentelor de inerție cu rotația axelor 128

8. Încovoierea barelor **135**

8.1 Tensiuni la încovoierea pură simetrică 135

8.2 Tensiuni la încovoierea oblică 143

8.3 Tensiuni de forfecare la încovoierea simplă 150

8.4 Bare cu secțiune variabilă 159

8.5 Bare cu secțiune eterogenă 162

8.6 Deformații la încovoiere 167

8.7 Centrul de forfecare 176

8.8 Tensiuni în bare curbe 178

9. Stări de tensiuni şi deformații specifice **187**

9.1 Starea tridimensională de tensiuni 187

9.2 Starea plană de tensiuni 195

9.3 Ecuații diferențiale de echilibru 201

9.4 Starea plană de deformații specifice 203

9.5 Legea lui Hooke generalizată 207

9.6 Ecuația lui Poisson 209

9.7 Energia potențială de deformație la încovoiere 210

9.8 Compozite armate cu fibre 212

9.9 Tensiuni termice 221

9.10 Tensiuni de contact 223

10. Teorii de rezistență **225**

10.1 Teoriile clasice de rezistență 226

10.2 Criterii de curgere 228
10.3 Criterii de rupere la materiale fragile 230
10.4 Aplicarea teoriilor de rezistență la stări plane de tensiuni 232
10.5 Aplicarea teoriilor de rezistență la bare 233
10.6 Criteriul Tsai-Hill pentru compozite stratificate 233

11. Solicitări combinate 237
11.1 Întinderea excentrică 237
11.2 Bare solicitate la încovoiere şi răsucire 241
11.3 Bare solicitate la întindere şi răsucire 245

Bibliografie 249
Anexe 253
Index 261

1.
MODELAREA CORPURILOR DEFORMABILE

Materialele utilizate în practica inginerească sunt deformabile. Sub acțiunea sarcinilor exterioare şi a variațiilor de temperatură, particulele care le compun îşi modifică poziția relativă, ceea ce duce la modificarea formei şi dimensiunilor pieselor şi structurilor.

Rezistența materialelor urmăreşte stabilirea unor relații între sarcinile exterioare aplicate corpurilor deformabile, pe de o parte, şi tensiunile şi deformațiile produse de acestea, pe de altă parte. Pe baza acestor relații, se poate face dimensionarea elementelor constructive ale maşinilor, astfel încât să reziste sarcinilor la care sunt supuse în timpul funcționării, în condiții date de mediu ambiant.

În rezolvarea problemelor, structura reală este înlocuită printr-un model de calcul. În acest scop, se adoptă ipoteze simplificatoare privind: 1) forma şi dimensiunile elementelor componente; 2) caracterul şi distribuția sarcinilor aplicate; 3) proprietățile mecanice ale materialelor.

1.1 Modelarea corpurilor

În funcție de forma şi caracteristicile geometrice, în Rezistența materialelor se studiază următoarele tipuri de corpuri:

1. *Barele şi firele*, la care o dimensiune - lungimea - este predominantă în raport cu celelalte două. Se poate considera că o bară este generată prin deplasarea unei suprafețe plane, deobicei de secțiune constantă, în lungul unei curbe (fig. 1.1), astfel încât normala la suprafață, în centrul ei de greutate, să rămână mereu tangentă la curbă.

Axa barei este linia care uneşte centrele de greutate ale secțiunilor transversale. Secțiunea transversală este perpendiculară pe axa barei. *Barele* sunt corpuri a căror lungime este mare în comparație cu dimensiunile secțiunii transversale.

Barele pot fi drepte, cotite sau curbe, de secțiune constantă sau variabilă. În figura 1.2 se prezintă câteva tipuri de secțiuni uzuale pentru bare.

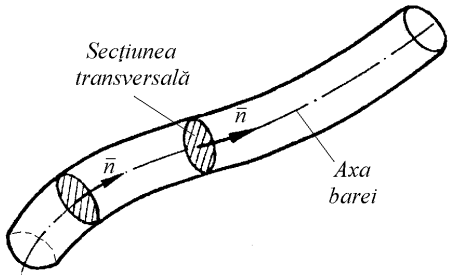


Fig. 1.1

Barele solicitate la încovoiere se mai numesc *grinzi*, cele solicitate la întindere sunt *tiranți*, iar cele solicitate la întindere şi compresiune sunt *tije*, *zăbrele* şi *contrafişe*. Barele verticale solicitate la compresiune poartă numele de *coloane* sau *stâlpi*. *Arborii* sunt bare solicitate la răsucire şi încovoiere (fig. 1.3).

În general, în cadrul Rezistenței materialelor se studiază *bare de secțiune compactă*. O categorie aparte o formează *barele cu pereți subțiri*, cu profil deschis sau închis. Bara cu pereți subțiri este un corp a cărui lungime este mare şi a cărui grosime este mică în comparație cu dimensiunile generale ale secțiunii transversale.

Firele au aceleaşi caracteristici geometrice ca unele bare, dar sunt flexibile, adică au rigiditate la încovoiere neglijabilă, putând fi solicitate numai la întindere.

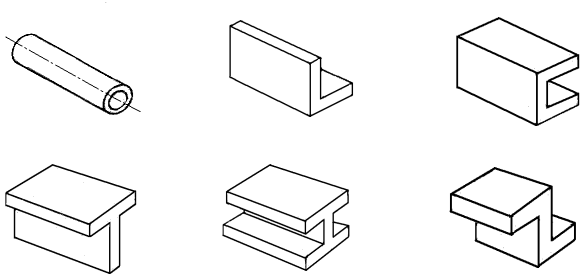


Fig. 1.2

2. *Plăcile şi învelişurile*, la care o dimensiune - grosimea - este mult mai mică decât celelalte două. Elementele geometrice caracteristice ale plăcilor sunt suprafața mediană (plană sau curbă) şi grosimea - măsurată pe o normală la suprafața mediană. Plăcile pot fi *planşee*, *panouri*, *pereți, acoperişuri* sau *radiere* (fig. 1.3). *Membranele* au grosimea foarte mică şi nu pot prelua sarcini transversale sau de compresiune.

3. *Corpurile masive şi blocurile*, la care cele trei dimensiuni au acelaşi ordin de mărime (de exemplu, bilele şi rolele rulmenților, suporturile masive, blocurile de fundație etc.).

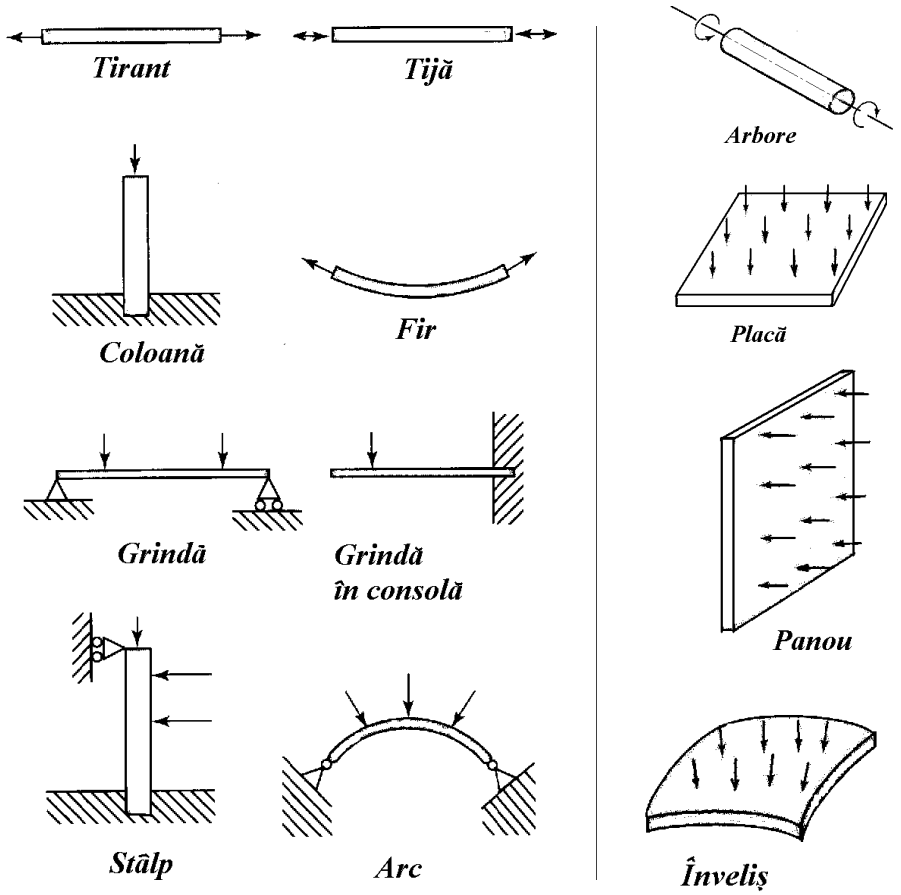


Fig. 1.3

De reținut că barele, plăcile, învelişurile etc. sunt modele ale Mecanicii solidelor deformabile, schematizări ale organelor de maşini şi elementelor de construcții, convenabile pentru stabilirea relațiilor de calcul al tensiunilor şi deformațiilor, şi al dimensiunilor acestora. În ce măsură o anumită piesă poate fi modelată ca bară sau placă, care este limita între o bară scurtă şi o placă, sau între o placă şi o membrană, sunt întrebări la care inginerul mecanic trebuie să răspundă.

1.2 Modelarea sarcinilor

Sarcinile exterioare aplicate corpurilor sunt rezultatul interacţiunii mecanice sau al acţiunii unor câmpuri (magnetic, gravitaţional, centrifugal, termic etc.).

În general, se disting:

- *forţe concentrate* (*F* în fig.1.4), care se măsoară în unităţi de forţă (N);
- *sarcini distribuite* pe un element liniar (*q* în fig. 1.4), care se măsoară în N/m, sarcini distribuite pe o suprafaţă (*p* în fig. 1.4), care se măsoară, de exemplu, în N/m^2, şi sarcini distribuite într-un volum, măsurate în N/m^3.

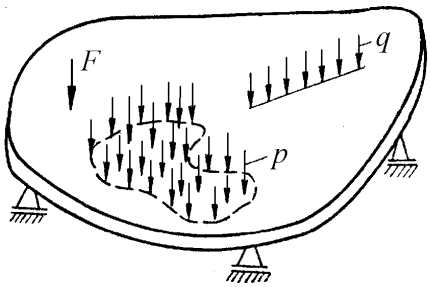


Fig. 1.4

Sarcinile distribuite pot fi: 1) uniform distribuite (q = const.) - ca în cazul greutăţii proprii a unei bare sau a unui fir de secţiune constantă, 2) distribuite liniar - ca în cazul presiunii hidrostatice pe un perete vertical şi 3) sarcini distribuite conform unei legi date, ca presiunea vântului pe o structură etc.

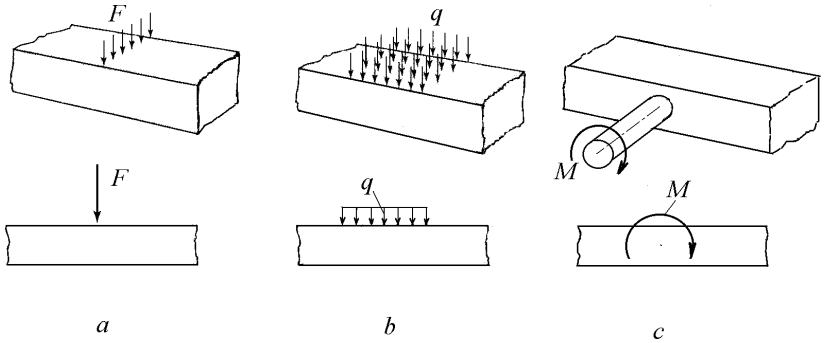


Fig. 1.5

Sarcinile aplicate unei grinzi (fig. 1.5) pot fi forţe concentrate, sarcini distribuite pe unitatea de lungime şi momente concentrate. Primele sunt ilustrate în figura 1.5, *a* în care sarcina acţionează de fapt pe suprafaţa barei în lungul unei linii

perpendiculare pe axa longitudinală. Aceasta este o idealizare. În realitate o sarcină concentrată este de fapt distribuită pe o porțiune foarte mică a barei.

O sarcină distribuită este ilustrată în figura 1.5, *b*. Intensitatea sarcinii este considerată constantă pe lățimea barei, dar poate avea o distribuție oarecare în lungul barei.

Un moment concentrat este arătat în figura 1.5, *c*. El apare fie dintr-un moment de răsucire transmis de la o altă bară perpendiculară pe cea încovoiată, fie dintr-un cuplu de forțe concentrate, egale şi de sens contrar, care se reduce la un cuplu concentrat.

În funcție de locul de aplicare, se deosebesc:

- *sarcini de suprafață*, aplicate la suprafața corpului, care rezultă de obicei din interacțiunea mecanică între corpuri;
- *forțe masice* (volumice), aplicate în toată masa corpului, care rezultă din acțiunea unui câmp (gravitațional, centrifugal, magnetic, termic etc.).

În funcție de modul de variație în timp, se pot considera:

- *forțe aplicate static*, a căror intensitate creşte monoton, de la zero la valoarea nominală, într-un timp foarte lung, pe măsura deformării corpului, rămânând apoi constante;
- *forțe aplicate dinamic*, care ating valoarea nominală într-un timp relativ scurt, mai mic sau comparabil cu perioada proprie de vibrație a elementului sau structurii solicitate.

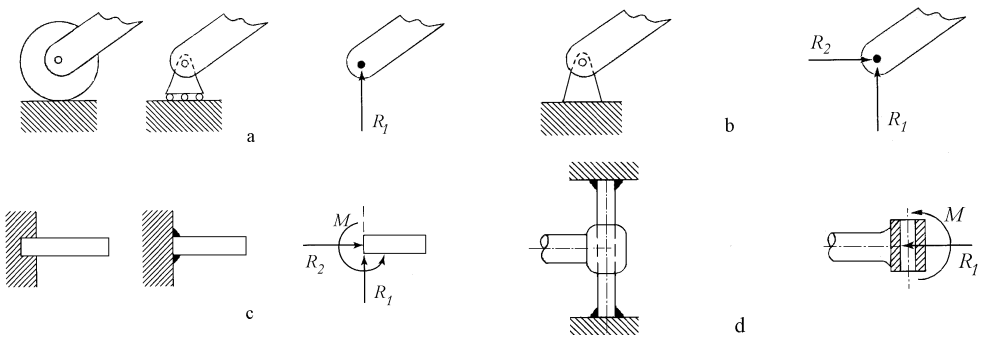


Fig. 1.6

1.3 Modelarea reazemelor

La structuri plane, capetele barelor pot fi rezemate ca în figura 1.6. *Reazemul simplu rigid* (fig. 1.6, *a*) permite deplasarea paralelă cu linia de suport şi rotirea, dar blochează deplasarea perpendiculară pe linia de suport, deci acționează asupra barei cu o reacțiune perpendiculară pe linia de suport.

Articulaţia rigidă (fig. 1.6, *b*) permite numai rotirea capătului barei, deci acţionează cu o reacţiune de mărime şi direcţie necunoscute, care se descompune în două componente perpendiculare între ele.

Încastrarea rigidă fixă (fig. 1.6, *c*) blochează toate cele trei grade de libertate ale capătului barei şi produce ca reacţiuni un moment şi o forţă reprezentată prin cele două componente. *Încastrarea rigidă mobilă* (fig. 1.6, *d*) permite deplasarea pe o direcţie, deci produce ca reacţiuni un moment şi o forţă perpendiculară pe direcţia de mişcare.

În structurile reale, atunci când nu se poate neglija deformabilitatea reazemelor, acestea se modelează prin reazeme elastice, la care forţele sunt proporţionale cu deplasările, sau încastrări elastice, la care momentul este proporţional cu rotirea.

1.4 Ipotezele Rezistenţei materialelor

În vederea simplificării relaţiilor de calcul, în Rezistenţa materialelor se adoptă următoarele ipoteze privind proprietăţile materialelor:

1. *Ipoteza mediului continuu*, prin care se admite că tot volumul unui corp este ocupat de substanţă.

2. *Ipoteza mediului omogen*, în baza căreia proprietăţile fizice (de exemplu, densitatea de masă) se consideră constante în orice punct al unui corp.

3. *Ipoteza mediului izotrop*, potrivit căreia în orice punct al corpului proprietăţile mecanice nu depind de direcţie (în particular, de direcţia de aplicare a solicitării).

4. *Ipoteza mediului elastic*. Sub acţiunea solicitării exterioare un corp elastic se deformează instantaneu, iar la îndepărtarea sarcinii revine instantaneu la forma şi dimensiunile iniţiale. De asemenea, acţiunea unei forţe într-un punct oarecare se transmite instantaneu în tot corpul.

Ultimele două ipoteze sunt reconsiderate în capitole speciale despre materiale compozite, bare cu secţiuni eterogene sau solicitări în domeniul elasto-plastic.

În afara celor patru ipoteze privind materialele, menţionate mai sus, în Rezistenţa materialelor se admit şi următoarele simplificări:

5. *Ipoteza liniarităţii* relaţiilor cauză-efect. În particular se admit relaţii liniare între forţe şi deformaţii, precum şi între eforturi şi tensiuni. La sisteme liniare se poate aplica principiul suprapunerii efectelor. Ca urmare, ordinea aplicării sarcinilor exterioare nu influenţează starea finală de tensiuni şi deformaţii a corpurilor.

6. *Ipoteza deformațiilor mici,* conform căreia se consideră că deformațiile corpurilor elastice sunt mici în comparație cu dimensiunile acestora. Prin această ipoteză se exclud *neliniaritățile geometrice*, adică cele determinate de forma corpurilor, precum şi *neliniaritățile fizice*, menținând solicitările la valori reduse sau la care relațiile între eforturi şi deformații sunt liniare.

Se consideră că deformațiile mici ale corpurilor nu afectează acțiunea forțelor (de exemplu, direcția acestora) şi sunt neglijabile în calculul solicitărilor. Ca urmare, la calculul reacțiunilor din reazeme, se consideră corpurile nedeformate, aplicând ecuațiile de echilibru din statică, la fel ca la corpurile rigide. Acesta este un *calcul de ordinul I*, considerat acceptabil pentru rezolvarea majorității problemelor de Rezistența materialelor. În unele studii, de exemplu de stabilitate elastică, se face un *calcul de ordinul II*, în care ecuațiile de echilibru se scriu pentru starea deformată a corpurilor, menținând ipoteza deformațiilor mici. În cazul deformațiilor mari se face un *calcul de ordinul III,* bazat pe ecuații neliniare.

7. Principiul *lui Saint Venant.* Dacă asupra unui corp elastic acționează două sisteme de sarcini exterioare, echivalente din punct de vedere static, atunci, la distanță suficient de mare de zona de aplicare a acestora, efectul lor este acelaşi.

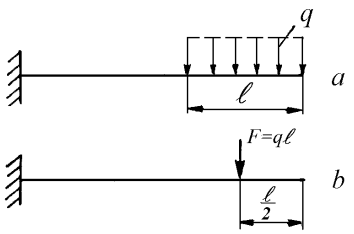


Fig. 1.7

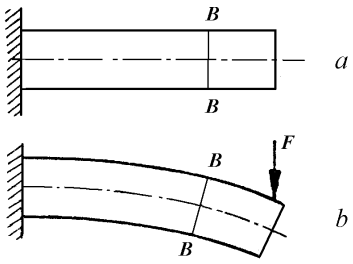


Fig. 1.8

Astfel, sarcina distribuită *q* şi forța *F* din figura 1.7, echivalente din punct de vedere static, produc local distribuții diferite de tensiuni şi deplasări, dar la distanță, de exemplu în încastrare, efectul lor este acelaşi.

8. *Ipoteza secțiunii plane* (Ipoteza lui Bernoulli). O secțiune plană şi perpendiculară pe axa unei bare nesolicitate, rămâne plană şi perpendiculară pe axa barei şi după aplicarea sarcinilor exterioare.

De exemplu, secțiunea *B*-*B*, normală la axa nedeformată a barei din figura 1.8, *a*, rămâne plană şi perpendiculară pe axa deformată a barei (fig.1.8, *b*) şi după aplicarea forței *F*.

Ipoteza secțiunii plane este valabilă la bare cu variație lentă a momentelor încovoietoare şi a forțelor axiale în lungul barei. Variația momentelor încovoietoare datorită forțelor tăietoare produce deformații de forfecare care *deplanează* secțiunea transversală. Efectul este neglijabil doar la bare zvelte, aşa

cum se arată în capitolul 6. În cazul răsucirii, ipoteza secţiunii plane este valabilă doar la bare cu secţiune axial-simetrică.

Primele şapte ipoteze sunt comune Rezistenţei materialelor şi Teoriei elasticităţii. Ipoteza lui Bernoulli este specifică Rezistenţei materialelor. În studiul plăcilor subţiri, se adoptă *ipoteza normalei rectilinii* (ipoteza lui Kirchhoff) conform căreia o linie dreaptă şi normală la suprafaţa mediană nedeformată rămâne dreaptă şi perpendiculară pe suprafaţa mediană deformată a plăcii în urma solicitării.

Alături de ipotezele menţionate, în special la studiul barelor cu pereţi subţiri, se adoptă următoarele "ipoteze de bară":

9. *Ipoteza constanţei secţiunii transversale*. Barele sunt în general corpuri cilindrice sau cu variaţie mică a secţiunii în lungul barei.

Relaţiile de calcul stabilite în Rezistenţa materialelor sunt strict valabile în cazul barelor cu secţiune compactă constantă. Ele pot fi extinse la corpuri cu variaţie mică şi monotonă a secţiunii în lungul axei longitudinale şi, cu anumite corecţii privind concentrarea locală a tensiunilor, la bare cu secţiunea variabilă în trepte.

10. *Ipoteza nedeformabilităţii secţiunii transversale*. Secţiunea barei are deplasări transversale ca rigid şi deplasări elastice normale la planul secţiunii transversale. La barele cu profil închis, forma secţiunii transversale nu se modifică iar proiecţia pe planul secţiunii iniţiale rămâne aceeaşi. La barele cu pereţi subţiri secţiunea transversală se poate deplana. Împiedicarea deplanării produce tensiuni suplimentare. La torsiunea barelor de secţiune circulară, diametrele secţiunilor transversale se consideră că rămân linii drepte. La bare cu secţiunea în I sau T, se admite că tălpile rămân perpendiculare pe inimă.

Tradiţional, în Rezistenţa materialelor se studiază bare şi sisteme de bare. Studiul plăcilor plane subţiri, al tuburilor axial-simetrice cu pereţi groşi şi al discurilor de grosime constantă în mişcare de rotaţie se face uneori la Rezistenţa materialelor, dar constituie obiectul *Teoriei aplicate a elasticităţii*. Studiul barelor cu pereţi subţiri şi al structurilor şi componentelor din materiale compozite face obiectul unor capitole speciale sau al unor cursuri aparte.

2.
EFORTURI ÎN BARE

Barele sunt solicitate la întindere, compresiune, forfecare, încovoiere şi răsucire, fie separat, fie în diferite combinaţii. În acest capitol se definesc *eforturile* secţionale care produc aceste solicitări şi convenţiile de semne aferente. Se calculează variaţia eforturilor în lungul axei barelor şi se reprezintă grafic sub forma unor *diagrame de eforturi*. La bare de secţiune constantă, acestea permit stabilirea secţiunii în care solicitarea este maximă.

2.1 Metoda secţionării

Fie o bară elastică, în echilibru sub acţiunea sarcinilor exterioare F_1, F_2, q,..., F_4 şi a reacţiunilor din reazeme R_1, R_2, R_3 (fig. 2.1, *a*). Se pune problema evaluării forţelor interioare care acţionează într-o secţiune oarecare *B*-*B*.

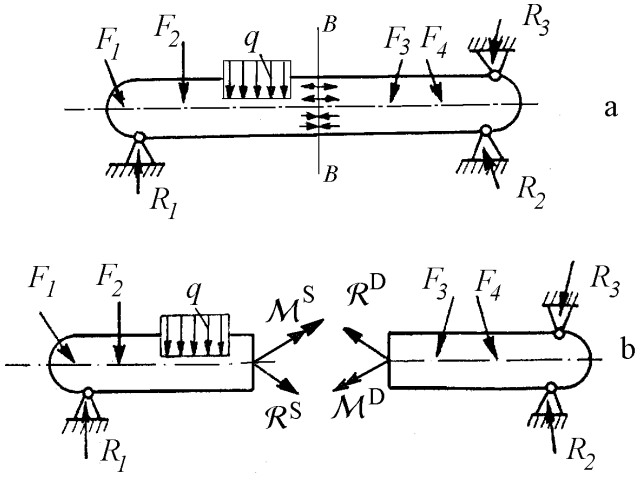


Fig. 2.1

Pentru aceasta se aplică *metoda secţionării*. Se secţionează bara (imaginar) prin planul *B-B*, se separă cele două părţi, se transformă forţele interioare din secţiunea *B-B* în forţe exterioare şi se scriu condiţiile de echilibru static pentru fiecare parte de bară.

Se presupune că legătura între particulele situate de o parte şi de alta a planului secţiunii *B-B* se manifestă prin interacţiuni de tip forţe, distribuite pe întreaga suprafaţă a secţiunii transversale a barei. Forţele din secţiune care reprezintă acţiunea părţii din stânga a barei, asupra celei din dreapta, se reduc în centrul de greutate al secţiunii transversale la un torsor compus din forţa rezultantă V^D şi cuplul rezultant, de moment Q^D (fig. 2.1, *b*).

Conform principiului acţiunii şi reacţiunii, în centrul de greutate al secţiunii barei din stânga acţionează forţa V^S şi cuplul rezultant, de moment Q^S, egale şi de sens contrar cu cele care acţionează asupra părţii din dreapta.

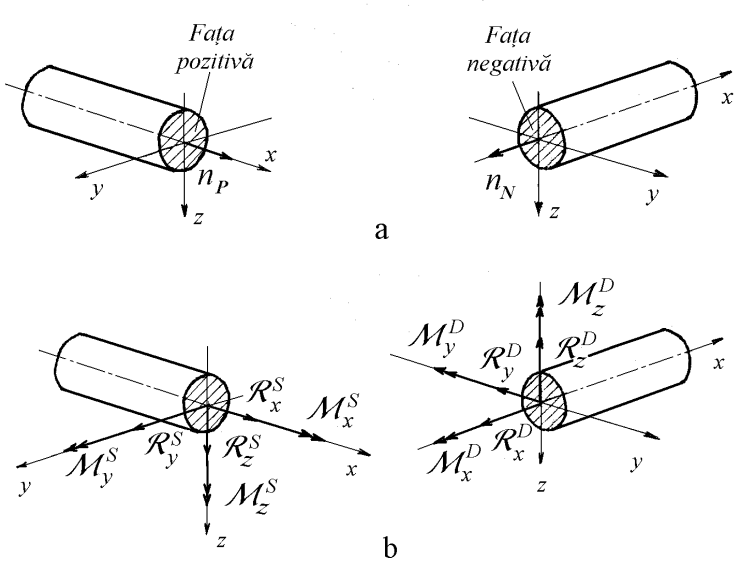


Fig. 2.2

2.2 Convenţii de semne

Se va utiliza un sistem de axe *drept.* Pentru o bară orizontală, axa *x* coincide cu axa barei şi este orientată de la stânga la dreapta, axa *z* este dirijată în jos, iar axa *y* este orizontală, dirijată spre observator (fig. 2.2).

Dacă sensul normalei exterioare la secțiunea transversală coincide cu sensul pozitiv al axei *x*, atunci fața respectivă a barei se numeşte *față pozitivă*. Pe o *față negativă*, sensul normalei exterioare este contrar axei *x* (fig. 2.2, *a*).

În figura 2.2, *b* s-au pus în evidență componentele în lungul axelor de coordonate ale rezultantei forțelor şi momentului rezultant ce acționează în centrul de greutate al secțiunii transversale. S-a adoptat următoarea convenție de semne:

Forțele şi momentele care acționează pe fața *pozitivă* a unui element de bară sunt pozitive atunci când sunt dirijate în sensul *pozitiv* al axelor de coordonate. Forțele şi momentele sunt pozitive pe fața *negativă* atunci când acționează în sensul *negativ* al axelor de coordonate.

2.3 Definiția eforturilor

Cele şase ecuații scalare de echilibru static al părții din stânga a barei se scriu sub forma:

$$\begin{aligned} \Sigma X^{\mathrm{S}} + V_x^{\mathrm{S}} &= 0, & \Sigma M_x^{\mathrm{S}} + Q_x^{\mathrm{S}} &= 0, \\ \Sigma Y^{\mathrm{S}} + V_y^{\mathrm{S}} &= 0, & \Sigma M_y^{\mathrm{S}} + Q_y^{\mathrm{S}} &= 0, \\ \Sigma Z^{\mathrm{S}} + V_z^{\mathrm{S}} &= 0, & \Sigma M_z^{\mathrm{S}} + Q_z^{\mathrm{S}} &= 0. \end{aligned} \qquad (2.1)$$

În ecuațiile (2.1), ΣX^{S} reprezintă suma proiecțiilor pe axa *x* a forțelor ce acționează asupra părții din stânga a barei, iar ΣM_x^{S} este suma momentelor forțelor (şi cuplurilor de forțe) care acționează asupra părții din stânga a barei, calculate față de axa *x*. Sumele față de axele *y* şi *z* se definesc corespunzător.

Conform principiului acțiunii şi reacțiunii, între cele şase componente ale torsorului de reducere a forțelor din secțiune, ce acționează asupra celor două părți ale barei, se stabilesc relațiile:

$$\begin{aligned} V_x^{\mathrm{D}} &= -V_x^{\mathrm{S}}, & Q_x^{\mathrm{D}} &= -Q_x^{\mathrm{S}}, \\ V_y^{\mathrm{D}} &= -V_y^{\mathrm{S}}, & Q_y^{\mathrm{D}} &= -Q_y^{\mathrm{S}}, \\ V_z^{\mathrm{D}} &= -V_z^{\mathrm{S}}, & Q_z^{\mathrm{D}} &= -Q_z^{\mathrm{S}}. \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Din relațiile (2.1) şi (2.2) rezultă

$$\begin{aligned} V_x^{\mathrm{D}} &= \Sigma X^{\mathrm{S}} = N, & Q_x^{\mathrm{D}} &= \Sigma M_x^{\mathrm{S}} = M_t, \\ V_y^{\mathrm{D}} &= \Sigma Y^{\mathrm{S}} = T_y, & Q_y^{\mathrm{D}} &= \Sigma M_y^{\mathrm{S}} = M_{i\mathrm{y}}, \\ V_z^{\mathrm{D}} &= \Sigma Z^{\mathrm{S}} = T_z, & Q_z^{\mathrm{D}} &= \Sigma M_z^{\mathrm{S}} = M_{i\mathrm{z}}. \end{aligned} \qquad (2.3)$$

unde, în plus, au fost definite şi eforturile secţionale, reprezentate în figura 2.3.

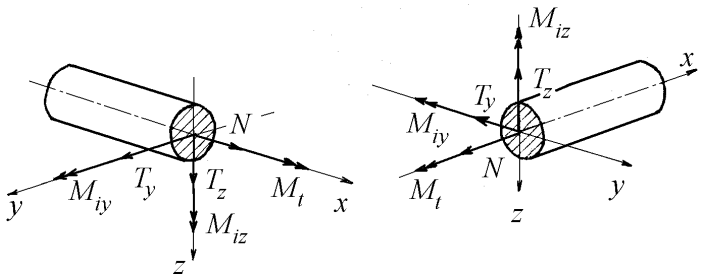


Fig. 2.3

Forţa axială.

Componenta pe axa *x* a rezultantei forţelor interioare se numeşte *forţă axială* şi se notează *N*. Într-o secţiune oarecare, forţa axială este egală cu suma proiecţiilor pe axa *x* a forţelor exterioare care acţionează asupra părţii din bară situate în stânga secţiunii (sau a celor situate în dreapta, cu semn schimbat). Forţa axială *N* produce întinderea sau comprimarea barei (fig. 2.4, *a* şi *b*).

Forţele tăietoare.

Componenta pe axa *z* a rezultantei V^D se numeşte *forţă tăietoare* şi se notează T_z. Ea este egală cu suma proiecţiilor pe axa *z* a forţelor ce acţionează asupra părţii de bară situate la stânga secţiunii (sau a celor din dreapta, cu semn schimbat). La fel pentru componenta $V_y^D = T_y$. Forţele tăietoare produc forfecare (tăiere) (fig. 2.4, *c*).

Momentul de răsucire.

Componenta pe axa *x* a cuplului Q^D se numeşte *moment de răsucire (torsiune)* şi se notează M_t. Într-o secţiune dată, momentul de răsucire este egal cu suma proiecţiilor pe axa *x* a momentelor forţelor şi a cuplurilor ce acţionează asupra părţii din stânga a barei (sau a celor din dreapta, cu semn schimbat). Momentul M_t produce răsucirea (torsionarea) barei (fig. 2.4, *d*).

Momentele încovoietoare.

Componenta pe axa *y* a cuplului Q^D se numeşte *moment încovoietor* şi se notează M_{iy}. (La fel $Q_z^D = M_{iz}$). Ea este egală cu suma momentelor forţelor şi a cuplurilor ce acţionează asupra părţii din stânga a barei, calculate în raport cu axa *y* (respectiv *z*). Momentele Q_y^D şi Q_z^D, notate în general M_i, produc îndoirea (încovoierea) barei (fig. 2.4, *e*).

Rezultă că, utilizând metoda secționării, se pun în evidență componentele torsorului de reducere a forțelor interioare în centrul de greutate al secțiunii transversale, denumite generic *eforturi*.

Se adoptă aceeaşi convenție de semne ca în figura 2.2, *b*. *Pe fața pozitivă, eforturile sunt pozitive când sunt dirijate în sensul pozitiv al axelor de coordonate. Eforturile care acționează pe fața negativă sunt pozitive atunci când au vectorii dirijați în sensul negativ al axelor de coordonate* (fig. 2.3).

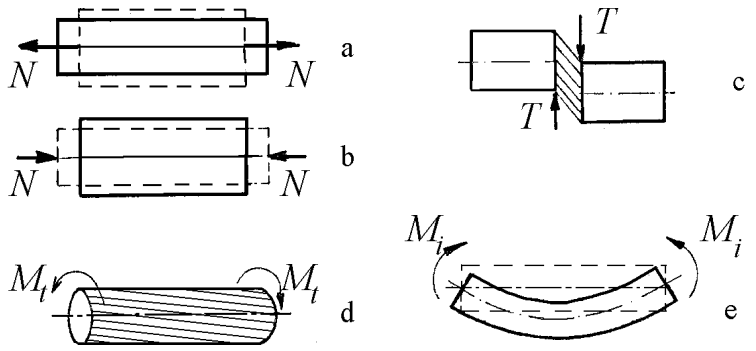


Fig. 2.4

Uneori este util să se coreleze eforturile pozitive cu deformațiile produse de acestea.

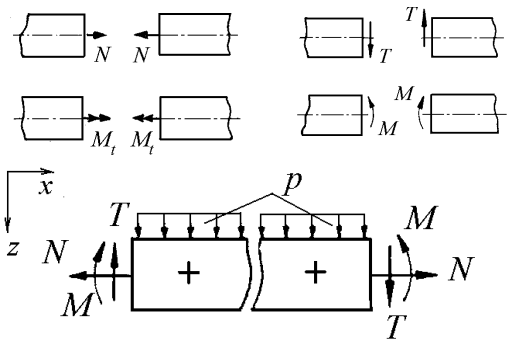


Fig. 2.5

Pentru o bară dreaptă orizontală, solicitată de sarcini transversale verticale, convenția de semne în planul *xOz* este ilustrată în figura 2.5, în care s-a renunțat la indici în notarea eforturilor.

Sarcina *p* pozitivă acționează în jos, acesta fiind şi sensul în care sunt aplicate sarcinile exterioare la majoritatea barelor orizontale.

Momentele încovoietoare M sunt pozitive când produc întinderea părţii de jos a barei, deci când forma îndoită a barei are concavitatea în sus (ca în fig. 2.4, *e*).

Forţele tăietoare T sunt pozitive când produc o lunecare similară unei rotiri în sensul orar (ca în fig. 2.4, *c*).

Forţele axiale N se consideră pozitive atunci când produc întindere (fig. 2.4, *a*) şi negative, atunci când produc compresiune (fig. 2.4, *b*).

Momentele de răsucire se vor considera pozitive atunci când vectorul moment este dirijat la fel ca vectorul forţelor axiale pozitive (fig. 2.4, *d*).

Trebuie remarcat că aceste reguli nu mai sunt aplicabile pentru bara solicitată de sarcini orizontale, deci în planul *xOy*.

Relaţiile (2.3) exprimă dependenţa eforturilor secţionale de sarcinile exterioare aplicate barei. În Rezistenţa materialelor se calculează variaţia eforturilor în lungul axei barelor şi se reprezintă grafic sub forma *diagramelor de eforturi*.

2.4 Relaţii diferenţiale de echilibru la bare drepte

Fie un element infinitezimal de lungime dx, detaşat dintr-o bară solicitată prin sarcini verticale, perpendiculare pe axă, în planul *xOz* (fig. 2.6). Lungimea dx fiind foarte mică, sarcina *p* se consideră uniform distribuită. În secţiunile din capete acţionează eforturile indicate în figură, reprezentând acţiunea părţilor de bară adiacente, asupra elementului respectiv.

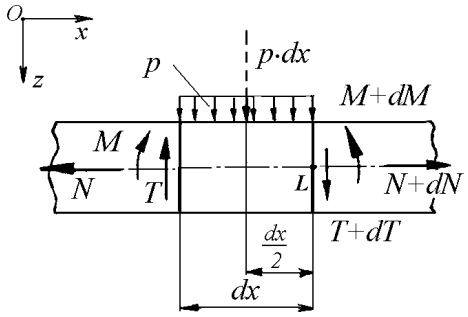


Fig. 2.6

Ecuaţiile de echilibru ale forţelor se scriu :

$$N + dN - N = 0;$$
$$T - p \cdot dx - (T + dT) = 0.$$

Ecuația de echilibru a momentelor față de punctul *L* este

$$M + T \cdot dx - p \cdot dx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0.$$

După reduceri şi neglijarea infiniților mici de ordin superior, ecuațiile de mai sus, valabile în planul *xOz*, se scriu :

$$dN = 0; \qquad -p \cdot dx - dT = 0; \qquad T \cdot dx - dM = 0$$

sau

$$N = \text{const.};$$

$$\frac{dT}{dx} = -p; \tag{2.4}$$

$$\frac{dM}{dx} = T. \tag{2.5}$$

Din *relațiile diferențiale de echilibru* (2.4) şi (2.5), denumite şi *relații diferențiale între eforturi şi sarcini*, prin eliminarea lui *T*, se obține :

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -p. \tag{2.6}$$

Pe baza acestor relații se stabilesc reguli general valabile, utile la construcția diagramelor de eforturi la bare drepte:

a) Pe porțiunile de bară nesolicitate ($p = 0$), forța tăietoare este constantă, iar momentul încovoietor variază liniar.

b) Pe porțiunile de bară solicitate cu sarcini *uniform* distribuite ($p = \text{const.}$), forța tăietoare variază liniar, iar momentul încovoietor variază parabolic.

c) Diagrama forțelor tăietoare are o discontinuitate (salt) în dreptul unei forțe concentrate, iar diagrama momentelor încovoietoare are o discontinuitate în dreptul unui cuplu concentrat.

d) Diagrama momentelor încovoietoare are valori extreme (maxim sau minim) în secțiunile în care forța tăietoare se anulează.

e) Pe porțiunile de bară unde forța tăietoare este pozitivă (negativă) momentul încovoietor creşte (scade).

f) Dacă sarcina distribuită este pozitivă (negativă), forța tăietoare scade (creşte) iar diagrama momentelor încovoietoare are concavitatea în sus (în jos).

Din relația (2.5) se obține

$$dM = T \cdot dx, \qquad M = \int T \cdot dx + C,$$

unde C este o constantă de integrare, în general diferită de zero dacă asupra barei acționează cupluri concentrate. Rezultă că

g) Într-o secțiune dată, momentul încovoietor este egal cu aria diagramei forțelor tăietoare calculată de la capătul din stânga al barei până la ordonata din secțiunea respectivă (sau cea calculată de la capătul din drepta, cu semn schimbat), dacă pe intervalul respectiv nu există cupluri concentrate ($C = 0$).

2.5 Diagrame de eforturi la bare drepte

Pentru construcția diagramelor de eforturi sunt necesare: 1) o convenție de semne privind sensul pozitiv al eforturilor; 2) o convenție de semne privind sensul pozitiv al axelor diagramelor de eforturi şi 3) relațiile diferențiale de echilibru.

Convenția de semne pentru eforturi rezultă din figura 2.3. Diagramele forțelor axiale şi forțelor tăietoare se reprezintă cu axa ordonatelor pozitivă în sus, în timp ce diagrama momentelor încovoietoare se reprezintă cu axa ordonatelor pozitivă în jos (pe partea întinsă a barei). Această convenție face ca diagrama momentelor încovoietoare să aibă o alură asemănătoare formei deformate a barei. Diagrama momentelor de torsiune se va reprezenta cu momentele pozitive în sus.

Pentru început, se vor considera bare drepte, solicitate de forțe şi sarcini distribuite cuprinse într-un plan vertical care conține axa barei, respectiv de cupluri având vectorul moment perpendicular pe acest plan.

Trebuie amintit că, în Rezistența materialelor, forțele şi momentele exterioare sunt *vectori legați* de punctul de aplicare, spre deosebire de Mecanica solidelor rigide, în care forțele sunt *vectori alunecători* iar momentele sunt considerate *vectori liberi*.

De asemenea, trebuie avut în vedere că *eforturile secționale* sunt mărimi convenționale, introduse pentru simplificarea calculelor. În realitate, forțele interioare se exercită pe toată suprafața secțiunii transversale, nu numai în centrul de greutate al acesteia, fiind distribuite continuu, ceea ce impune introducerea altor mărimi fizice, *tensiunile*, care să caracterizeze interacțiunea dintre particulele unui corp deformabil solicitat mecanic.

2.5.1 Diagrame de forțe tăietoare şi momente încovoietoare

a) Grindă simplu rezemată, încărcată cu o forță concentrată (fig. 2.7)

Din ecuațiile de echilibru rezultă reacțiunile :

$$V_1 = \frac{F\,b}{\ell}; \qquad V_2 = \frac{F\,a}{\ell}.$$

Forța tăietoare este constantă pe cele două porțiuni

$$T_{1-3} = V_1 = \frac{F\,b}{\ell}; \qquad T_{3-2} = V_1 - F = -\frac{F\,a}{\ell}$$

În secțiunea *3*, în diagrama *T* apare un salt egal cu *F*.

Momentul încovoietor are valorile :

$$M_1 = 0, \qquad M_3 = \frac{F\,b}{\ell}\,a, \qquad M_2 = 0$$

şi variază liniar pe cele două porțiuni :

$$M_{1-3} = V_1 \cdot x = \frac{F\,b}{\ell}\,x\,, \qquad M_{3-2} = V_2 \cdot x' = \frac{F\,a}{\ell}\,x'\,.$$

Valoarea maximă $M_{max} = \dfrac{F\,a\,b}{\ell}$ apare în secțiunea *3* unde diagrama forței tăietoare intersectează axa absciselor.

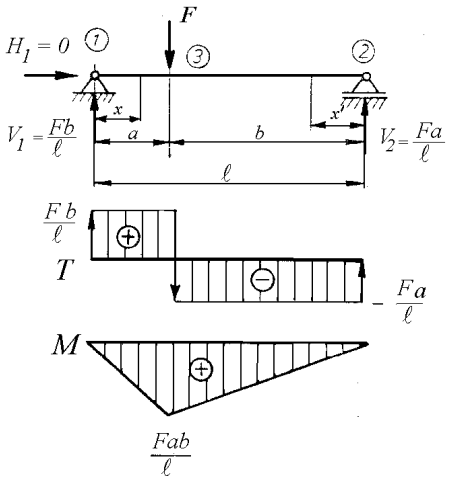


Fig. 2.7

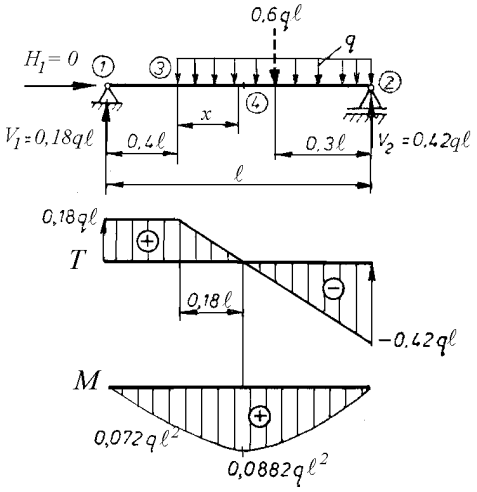


Fig. 2.8

b) Grindă simplu rezemată, încărcată parțial cu sarcină uniform distribuită (fig.2.8)

Se înlocuieşte sarcina distribuită cu o forță concentrată $0{,}6\,q\,\ell$ aplicată la mijlocul porțiunii 3-2. Din ecuațiile de echilibru se calculează reacțiunile :

$$V_1 = 0{,}18\,q\ell; \qquad V_2 = 0{,}42\,q\ell\,.$$

În punctul *1*, forța tăietoare este

$$T_1 = 0{,}18\, q\, \ell$$

fiind constantă pe porțiunea *1-3* :

$$T_{1-3} = 0{,}18\, q\, \ell$$

Pe porțiunea *3-2*, într-o secțiune oarecare *x*, forța tăietoare este

$$T_{3-2} = T_x = 0{,}18\, q\, \ell - q\, x\,.$$

În punctul *2*,

$$T_2 = 0{,}18\, q\, \ell - 0{,}6\, q\, \ell = -0{,}42\, q\, \ell\,.$$

Forța tăietoare se anulează ($T_{3-2} = 0$) în punctul *4*, situat la distanța $x = 0{,}18\ell$ față de secțiunea *3*.

Momentul încovoietor variază liniar pe porțiunea *1-3*, având la capete valorile :

$$M_1 = 0; \qquad M_3 = V_1 \cdot 0{,}4\ell = 0{,}18\, q\, \ell \cdot 0{,}4\ell = 0{,}072\, q\, \ell^2\,.$$

Pe porțiunea *3-2*, momentul încovoietor variază parabolic, în secțiunea *x* având expresia

$$M_x = V_1\,(0{,}4\ell + x) - \frac{qx^2}{2} = 0{,}18\, q\ell\,(0{,}4\ell + x) - \frac{qx^2}{2}\,.$$

În secțiunea *4* se obține valoarea maximă

$$M_{max} = 0{,}18\, q\ell \cdot 0{,}58\ell - \frac{q}{2}(0{,}18\ell)^2 = 0{,}0882\, q\, \ell^2\,.$$

c) Grindă simplu rezemată, solicitată de un cuplu concentrat (fig. 2.9)

Reacțiunile sunt

$$V_1 = -V_2 = \frac{Q}{\ell}\,.$$

Forța tăietoare este constantă în lungul barei

$$T_{1-2} = \frac{Q}{\ell}\,.$$

Momentul încovoietor variază liniar :

$$M_{1-3} = \frac{Q}{\ell}\, x; \qquad M_{3-2} = -\frac{Q}{\ell}\, x'\,.$$

În punctul *3* apare un salt egal cu Q , valorile în secțiunile adiacente fiind

$$M_{3-\varepsilon} = \frac{Q}{\ell} a; \qquad M_{3+\varepsilon} = -\frac{Q}{\ell} b .$$

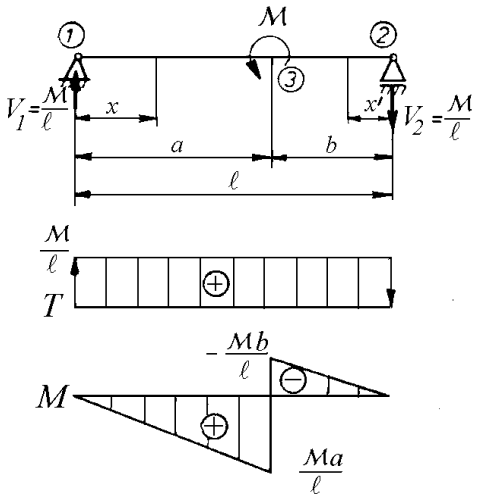


Fig. 2.9

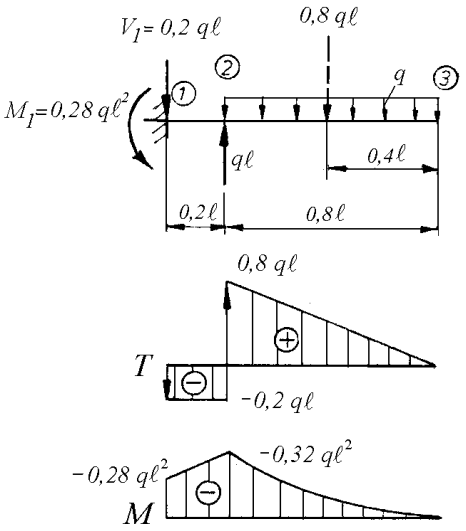


Fig. 2.10

d) Grindă în consolă încărcată cu forță concentrată şi sarcină distribuită (fig. 2.10)

Din ecuația de proiecții pe verticală a forțelor se obține reacțiunea $V_1 = 0{,}2\, q\, \ell$. Din ecuația de momente față de punctul *1* se obține momentul din încastrare $M_1 = 0{,}28\, q\, \ell^2$.

Forța tăietoare este constantă pe porțiunea *1-2* :

$$T_{1-2} = -0{,}2\, q\, \ell$$

şi are un salt egal cu $q\, \ell$ în secțiunea *2*, scăzând apoi liniar la zero.

Momentul încovoietor în încastrare este $M_1 = -0{,}28\, q\, \ell^2$, pe porțiunea *1-2* variază liniar până la $M_2 = -0{,}32\, q\, \ell^2$, scăzând apoi parabolic la zero în punctul *3* unde diagrama momentelot încovoietoare are pantă nulă deoarece forța tăietoare este nulă.

e) Grindă simplu rezemată, încărcată cu sarcină triungiulară (fig. 2.11)

Pentru calculul reacţiunilor, se înlocuieşte sarcina distribuită cu o forţă concentrată $\frac{q\,\ell}{2}$, aplicată la distanţa $\frac{2\,\ell}{3}$ de reazemul din stânga (în centrul de greutate al triunghiului). Se obţin valorile $V_1 = \frac{q\,\ell}{6},\ V_2 = \frac{q\,\ell}{3}$.

În secţiunea *x*, intensitatea sarcinii distribuite este :

$$q_x = \frac{x}{\ell}\,q\,,$$

forţa tăietoare este

$$T_x = \frac{q\,\ell}{6} - \frac{1}{2}\,q_x x = \frac{q\,\ell}{6} - \frac{q\,x^2}{2\,\ell}$$

iar momentul încovoietor este

$$M_x = \frac{q\,\ell}{6}\,x - \frac{1}{2}\,q_x x\,\frac{x}{3} = \frac{q\,\ell\,x}{6} - \frac{q\,x^3}{6\,\ell}\,.$$

Anulând expresia forţei tăietoare, se obţine abscisa $x = \ell/\sqrt{3}$ în care momentul încovoietor are valoarea maximă $M_{max} = \frac{q\,\ell^2}{9\sqrt{3}}$.

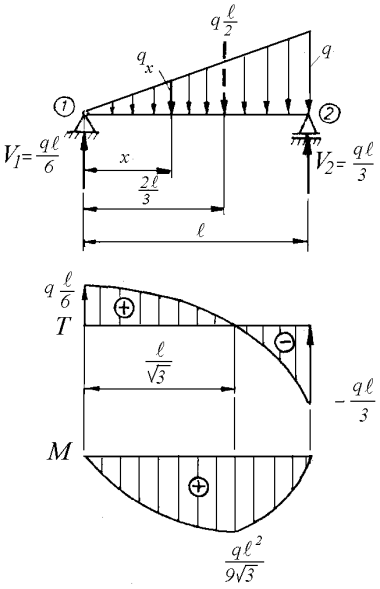


Fig. 2.11

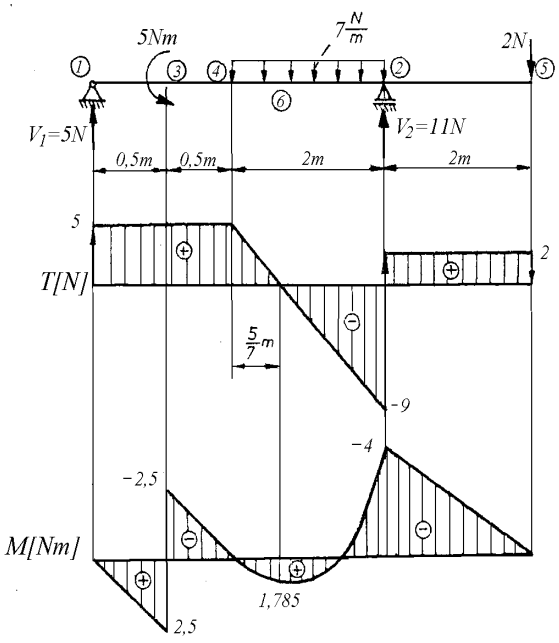
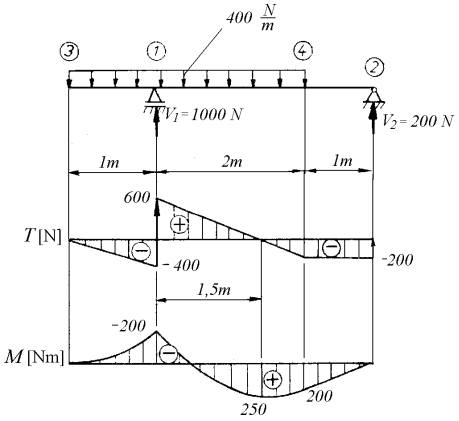
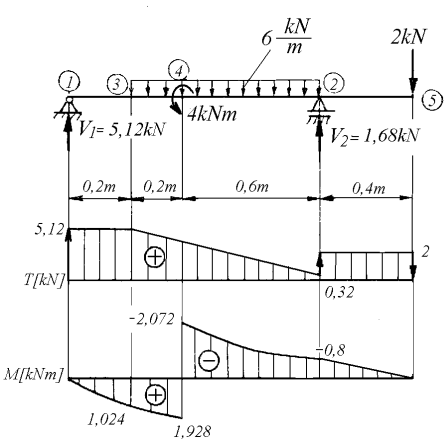


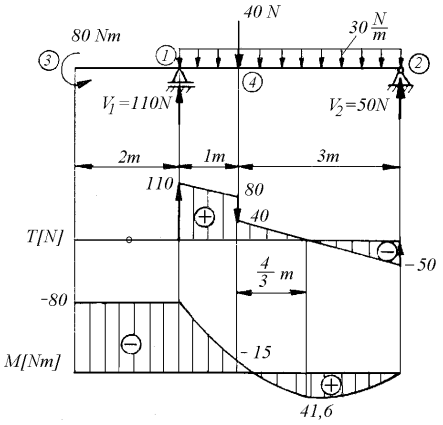
Fig. 2.12



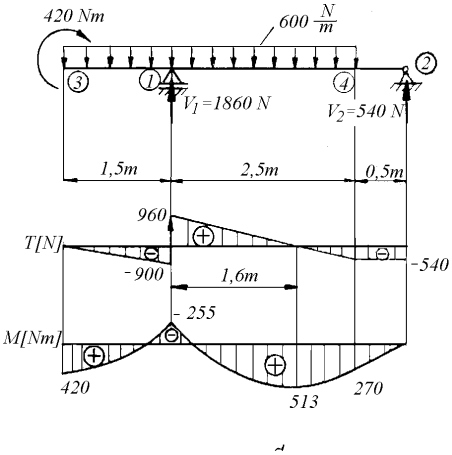
a



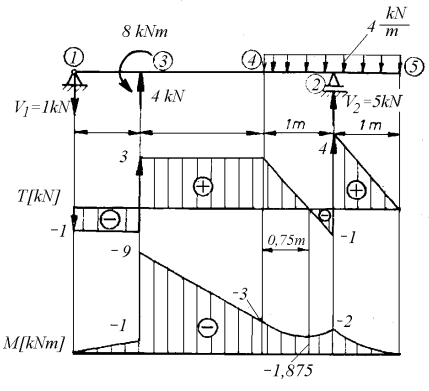
b



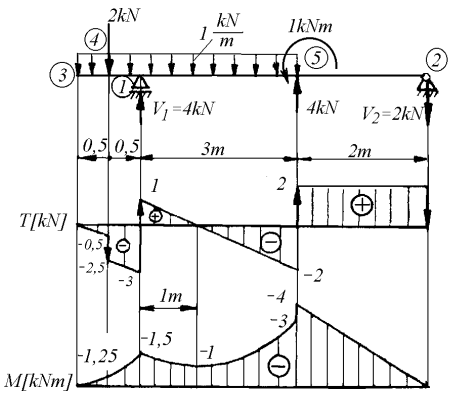
c



d



e



f

Fig. 2.13

Exemplul 2.1

Se cere să se construiască diagramele *T* şi *M* la grinda din figura 2.12.

Rezolvare

Reacţiunile sunt : $V_1 = 5\ \text{N};\quad V_2 = 11\ \text{N}.$

Forţele tăietoare au valorile: $T_{1-4} = 5\ \text{N};\ T_{4-2} = (5 - 7x)\ \text{N};\ T_{2-5} = 2\ \text{N}.$

Pentru $T_{4-2} = 0$ se obţine $x_6 = \frac{5}{7}\ \text{m}$.

Momentele încovoietoare au valorile : $M_{3-\varepsilon} = 2{,}5\ \text{Nm};\ M_{3+\varepsilon} = -2{,}5\ \text{Nm};$ $M_2 = -4\ \text{Nm};\ M_6 = 1{,}785\ \text{Nm}.$

Rezultă $|M_{max}| = 4\ \text{Nm}.$

Exemple de calcul

În figura 2.13 se dau şase exemple de grinzi la care s-au construit diagramele forţelor tăietoare şi ale momentelor încovoietoare.

2.5.2 Diagrama forţelor axiale

Pentru bara din figura 2.14, *a*, solicitată de forţe dirijate în lungul axei barei, se calculează forţa axială pe fiecare porţiune :

$$N_{1-2} = -2F;\quad N_{2-3} = F;\quad N_{3-4} = 2F;\quad N_{4-5} = -F$$

şi se construieşte diagrama de eforturi din figura 2.14, *b* ţinând cont de convenţiile de semne.

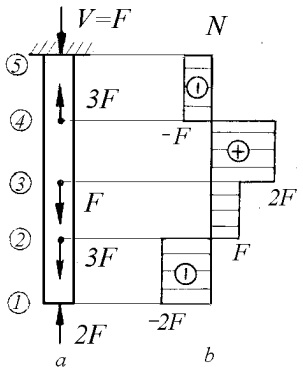


Fig. 2.14

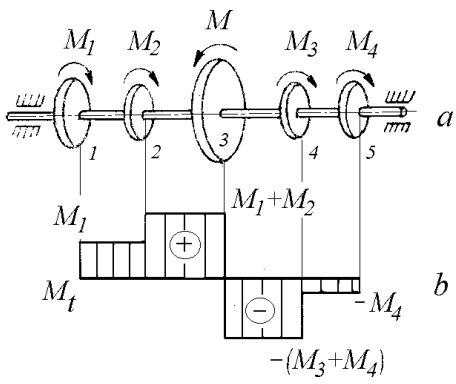


Fig. 2.15

2.5.3 Diagrama momentelor de răsucire

Pentru bara din figura 2.15, *a*, solicitată de momentul activ M şi de momentele rezistente $M_1,...,M_4$, ecuaţia de echilibru a momentelor este

$$M_1 + M_2 - M + M_3 + M_4 = 0.$$

Se calculează momentul de torsiune pe fiecare porţiune de bară:

$$M_{t\,1-2} = M_1, \qquad M_{t\,2-3} = M_1 + M_2,$$
$$M_{t\,3-4} = M_1 + M_2 - M = -(M_3 + M_4), \qquad M_{t\,4-5} = -M_4,$$

apoi se reprezintă grafic faţă de o linie de referinţă paralelă cu axa barei, ca în figura 2.15, *b*, ţinând cont de convenţiile de semne.

2.6 Diagrame de eforturi la bare cotite plane

Barele cotite şi cadrele sunt formate din mai multe bare drepte, legate prin noduri rigide. Nodurile rigide realizează legături care menţin unghiul dintre axele barelor concurente în nod şi după aplicarea solicitării.

Pentru construcţia diagramelor de eforturi trebuie precizat, pentru fiecare bară componentă, sensul pozitiv al axei *x*. În cele ce urmează se consideră bare cotite solicitate de sarcini coplanare.

Fie bara din figura 2.16. Se calculează reacţiunile. Din ecuaţia de proiecţii pe verticală a forţelor se obţine $V_1 = 2\,q\,\ell$. Se înlocuieşte sarcina distribuită cu o forţă orizontală $3\,q\,\ell$ aplicată la mijlocul barei *1-3*. Ecuaţia de momente faţă de punctul *1* se scrie

$$3\,q\,\ell\,\frac{3\ell}{2} + 2\,q\,\ell\cdot\ell - H_2\cdot 2\,\ell = 0$$

Rezultă $H_2 = \frac{13}{4} q\,\ell$. Din ecuaţia de proiecţii pe orizontală a forţelor se obţine $H_1 = \frac{q\,\ell}{4}$.

Forţele axiale au valorile :

$$N_{1-3} = -2\,q\,\ell, \qquad N_{3-5} = -\frac{13}{4} q\,\ell, \qquad N_{5-2} = 0\,.$$

Cu aceste valori se construieşte diagrama din figura 2.16, *b*.

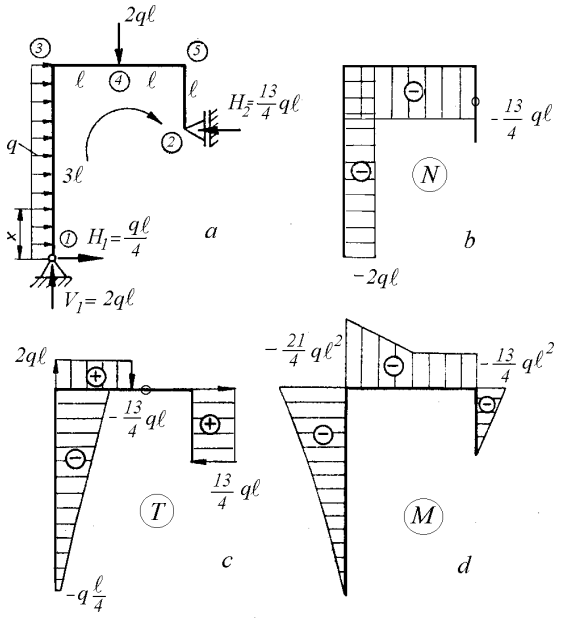


Fig. 2.16

Forţele tăietoare sunt :

$$T_1 = -\frac{q\,\ell}{4}, \quad T_{1-3} = -\frac{q\,\ell}{4} - q\,x, \quad T_{3-\varepsilon} = -\frac{13}{4}q\,\ell,$$

$$T_{3+\varepsilon} = 2\,q\,\ell, \quad T_{3-4} = 2\,q\,\ell, \quad T_{4-5} = 0, \quad T_{5-2} = \frac{13}{4}q\,\ell\,.$$

Cu aceste valori se construieşte diagrama din figura 2.16, *c*.

Momentele încovoietoare au valorile :

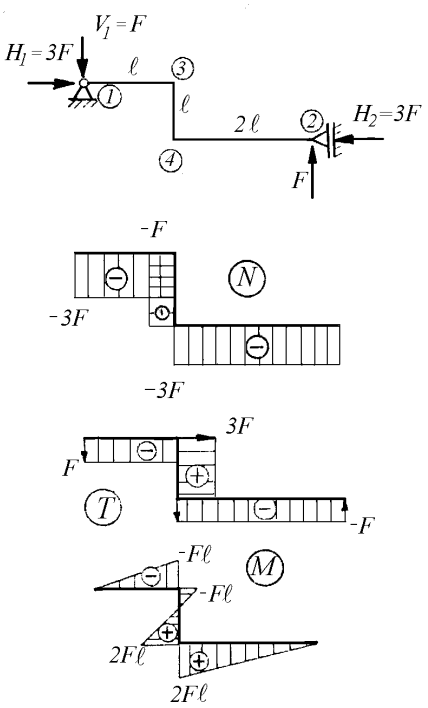
$$M_1 = 0, \quad M_3 = -\frac{21}{4}q\,\ell^2, \quad M_4 = M_5 = -\frac{13}{4}q\,\ell^2, \quad M_2 = 0\,,$$

cu ajutorul cărora se construieşte diagrama din figura 2.16, *d*.

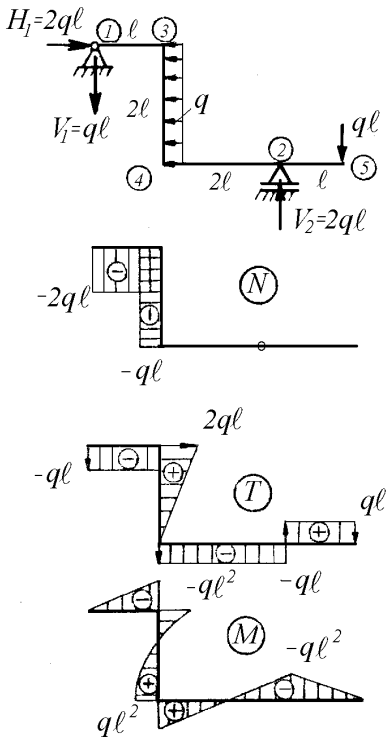
Se observă că la colţurile barei cotite, valorile forţelor axiale şi forţelor tăietoare se modifică la trecerea de la o bară la cealaltă, deoarece aceste eforturi depind de direcţie. În schimb, valorile momentelor încovoietoare sunt aceleaşi pentru cele două bare concurente într-un nod, deoarece valoarea momentului încovoietor depinde numai de punctul în care se calculează şi nu de direcţia barei.

Exemple de calcul

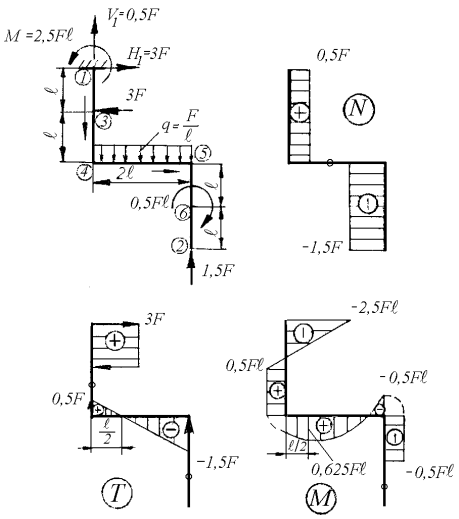
În figura 2.17 se dau patru exemple de grinzi cotite la care s-au construit diagramele forţelor axiale, forţelor tăietoare şi ale momentelor încovoietoare.


V1 = F
H1 = 3F
ℓ
ℓ
2 ℓ
H2=3F
F
-F
N
-3F
-3F
3F
F
T
-F
-Fℓ
M
-Fℓ
2Fℓ
2Fℓ

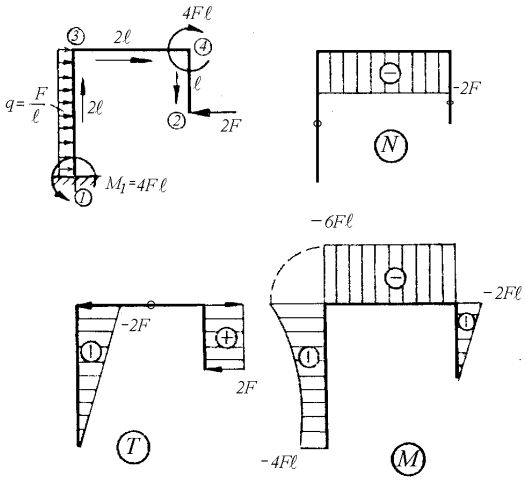
a


H1=2qℓ
ℓ
V1=qℓ
2ℓ
q
qℓ
2ℓ
ℓ
V2=2qℓ
-2qℓ
N
-qℓ
2qℓ
-qℓ
T
qℓ
-qℓ2
-qℓ
M
-qℓ2
qℓ2

b


M =2,5Fℓ
V1=0,5F
H1=3F
3F
q= F/ℓ
2ℓ
0,5Fℓ
1,5F
0,5F
N
-1,5F
3F
0,5F
-1,5F
T
-2,5Fℓ
0,5Fℓ
-0,5Fℓ
0,625Fℓ
-0,5Fℓ
M

c


4Fℓ
2ℓ
q= F/ℓ
2ℓ
ℓ
2F
M1=4Fℓ
-2F
N
-6Fℓ
-2Fℓ
-2F
2F
T
-4Fℓ
M

d

Fig. 2.17

2.7 Diagrame de eforturi la bare cotite spațiale

La bare cotite spațiale se construiesc diagrame de eforturi față de o linie de referință la fel ca bara. Pe fiecare porțiune se defineşte orientarea axei *x*, care poate fi arbitrară, deşi se preferă continuitatea sensului, la schimbarea direcției.

În continuare se vor construi patru diagrame de eforturi *N*, *T*, M_i şi M_t, deci diagramele forțelor tăietoare T_y, T_z şi ale momentelor încovoietoare M_{iy}, M_{iz} vor fi desenate în diagrama *T*, respectiv M_i. Funcție de tipul aplicației, se pot construi fie doar diagramele M_i şi M_t, fie diagramele *N* şi M_i.

Relațiile diferențiale de echilibru (2.4), (2.5) în planul *xOz,* scrise cu indici, au forma

$$\frac{dT_z}{dx} = -p_z\,, \qquad \frac{dM_y}{dx} = T_z\,. \tag{2.7}$$

În planul *xOy*, relațiile diferențiale de echilibru se scriu

$$\frac{dT_y}{dx} = -p_y\,, \qquad \frac{dM_z}{dx} = -T_y\,. \tag{2.8}$$

Rezultă că în planul *xOy*, regula de semne şi reprezentarea geometrică pentru forțe tăietoare este aceeaşi ca în planul *xOz*, în schimb, momentele încovoietoare au semn contrar, deci diagrama momentelor încovoietoare va avea aceeaşi formă, dar cu semne schimbate.

Pentru bare încastrate la un capăt, este recomandabil să se înceapă calculul de la cătul liber; astfel nu mai este necesar calculul reacțiunilor. Prima porțiune dreaptă se consideră încastrată în restul sistemului şi se construiesc diagramele de eforturi aferente. Pentru construcția diagramelor de eforturi pe următoarea porțiune dreaptă, se reduc forțele de pe porțiunea anterioară în capătul adiacent al barei şi se consideră bara încastrată la celălalt capăt (se "rigidizează" restul sistemului).

Deobicei se precizează sensul axelor *y* şi *z* pentru fiecare porțiune dreaptă. În continuare, pentru simplificarea expunerii, nu se face această precizare. Pentru claritate, la diagrama momentelor de răsucire s-a inversat convenția de semne.

Exemplul 2.2

Fie bara din figura 2.18, *a*, la care s-a precizat sensul axei *x* pe fiecare porțiune.

Se consideră porțiunea *2-3*, încastrată în *2* (fig. 2.18, *b*). Se calculează eforturile şi se reprezintă pe porțiunea respectivă din diagramele din fig. 2.18, *d, e, f, g:* $N_{2-3} = 4$ kN, $T_{2-3} = 2$ kN (în plan vertical), $M_2 = -1{,}6$ kNm (în plan vertical), $M_{t2-3} = 0$.

Se secţionează bara în *2*. Se reduc forţele aplicate în *3* în punctul *2* al barei *1-2* (fig. 2.18, *c*) încastrată în *1*. Se calculează eforturile $N_{1-2} = 0$, $M_{t1-2} = 1{,}6\,\text{kNm}$, forţele tăietoare şi momentele încovoietoare în planul vertical, produse de forţa 2 kN, apoi cele din planul orizontal, produse de forţa 4 kN. Se obţin diagramele din figurile 2.18, *d, e, f, g*.

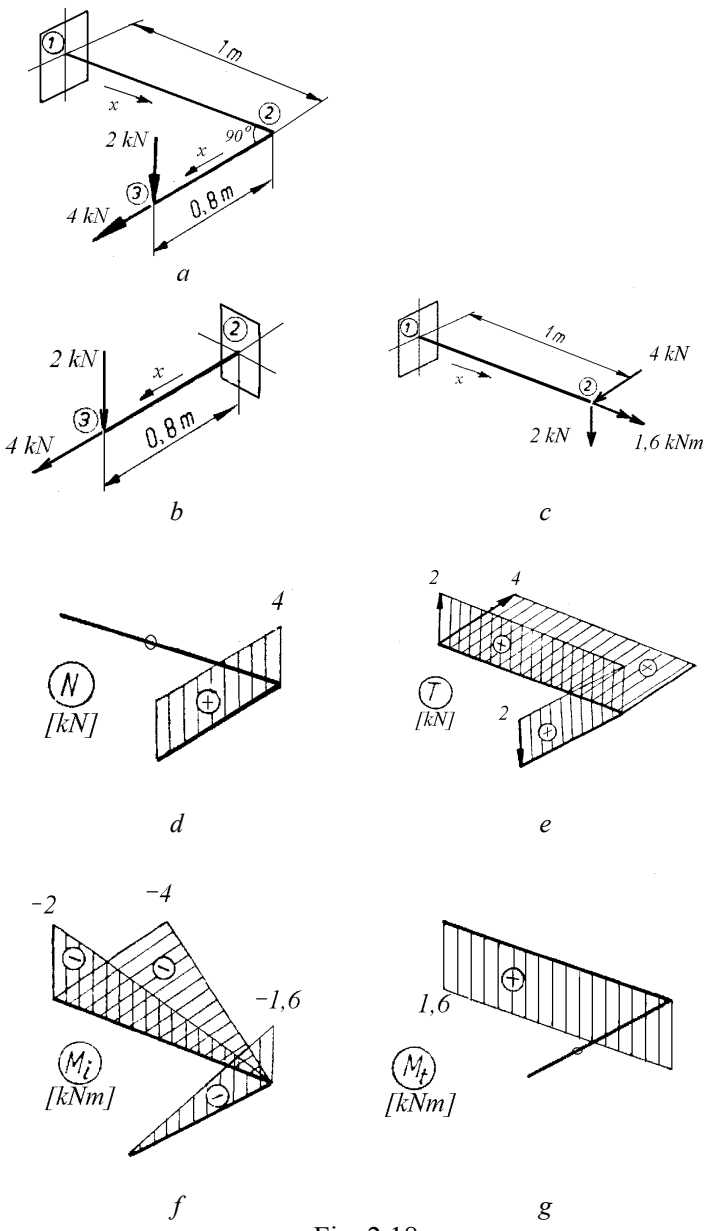


Fig. 2.18

Exemplul 2.3

Fie bara din figura 2.19, *a*, solicitată în punctul *4* de forţa *F* şi de cuplul concentrat 2*Fa*. Se alege sensul pozitiv al axei *x* pentru fiecare porţiune.

Se consideră porţiunea *3-4*, încastrată în *3* (fig. 2.19, *b*) şi se calculează eforturile aferente.

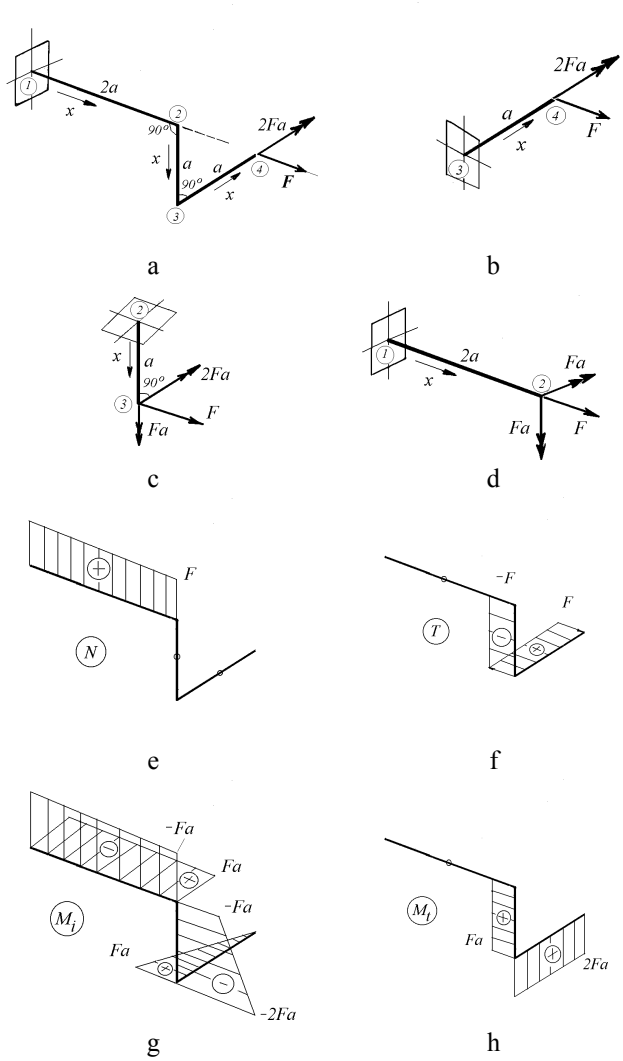


Fig. 2.19

Se secţionează sistemul în *3*, se îndepărtează bara *3-4*, se reduc forţele ce acţionează asupra barei *3-4* în punctul *3*, capătul barei *2-3* (fig. 2.19, *c*) şi se calculeaza eforturile în bara *2-3*, încastrată în *2*. Se construiesc diagramele de eforturi pentru bara *2-3*.

Se secționează sistemul în *2*, se îndepărtează bara *2-3*, se reduc forțele care acționează asupra barei *2-3* (din fig. 2.19, *c*) în punctul *2*, capătul barei *1-2* (fig. 2.19, *d*) şi se calculează eforturile în bara *1-2*, încastrată în *1*. Diagramele de eforturi sunt prezentate în figurile 2.19, *e, f, g, h*.

2.8 Relații diferențiale de echilibru la bare curbe plane

Se consideră bare curbe plane, solicitate prin forțe coplanare.

Fie un element infinitezimal de lungime $BC = \mathrm{d}s$ şi rază R, obținut prin secționarea unei bare curbe în B şi C (fig. 2.20), solicitat de o sarcină distribuită p în direcție radială (înlocuită prin forța concentrată $p\,\mathrm{d}s$ aplicată la mijlocul elementului BC). Pentru echilibru, în cele două secțiuni de la capete s-au introdus eforturile N, T, M, respectiv $N+\mathrm{d}N$, $T+\mathrm{d}T$, $M+\mathrm{d}M$.

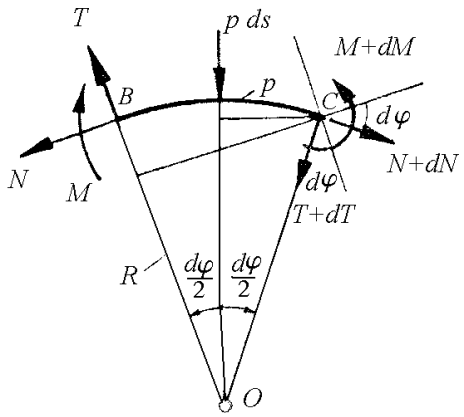


Fig. 2.20

Se scriu ecuațiile de echilibru static: ecuațiile de proiecții pe direcțiile forțelor N, T şi ecuația de momente față de punctul C :

$$N - (N + \mathrm{d}N)\cos \mathrm{d}\varphi + (T + \mathrm{d}T)\sin \mathrm{d}\varphi + p\,\mathrm{d}s \sin\frac{\mathrm{d}\varphi}{2} = 0,$$

$$T - (T + \mathrm{d}T)\cos \mathrm{d}\varphi - (N + \mathrm{d}N)\sin \mathrm{d}\varphi - p\,\mathrm{d}s \cos\frac{\mathrm{d}\varphi}{2} = 0,$$

$$M - (M + \mathrm{d}M) - N\,R\,(1 - \cos \mathrm{d}\varphi) + T\,R \sin \mathrm{d}\varphi - p\,\mathrm{d}s\,R \sin\frac{\mathrm{d}\varphi}{2} = 0.$$

Înlocuind $\sin \mathrm{d}\varphi \cong \mathrm{d}\varphi$, $\cos \mathrm{d}\varphi \cong 1$, făcând reducerile necesare şi neglijând infiniții mici de ordin superior, se obține

$$-\mathrm{d}N + T\,\mathrm{d}\varphi = 0,$$

$$-\mathrm{d}T - N\,\mathrm{d}\varphi - p\,\mathrm{d}s = 0,$$

$$-\mathrm{d}M + T\,R\,\mathrm{d}\varphi = 0.$$

Înlocuind $\mathrm{d}s = R\,\mathrm{d}\varphi$, rezultă ecuațiile diferențiale de echilibru

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s} = \frac{T}{R}, \qquad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = -\frac{N}{R} - p, \qquad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s} = T. \tag{2.9}$$

La bare în formă de arc de cerc (R=const.), relațiile (2.9) devin

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\varphi} = T, \qquad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\varphi} = -N - pR, \qquad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\varphi} = T\,R. \tag{2.10}$$

Pentru $R \to \infty$, din ecuațiile (2.9) se obțin relațiile diferențiale de echilibru (2.4) şi (2.5) de la bare drepte.

2.9 Diagrame de eforturi la bare curbe plane

Se consideră bare în formă de arc de cerc, cu raza R. Eforturile se definesc prin metoda secționării.

Forța axială N este egală cu suma proiecțiilor pe tangenta la axa barei a forțelor care acționează de o parte a secțiunii considerate. Forța tăietoare T se calculează ca suma proiecțiilor pe normala la axa barei a forțelor ce acționează de o parte a secțiunii. Momentul încovoietor M este egal cu suma momentelor forțelor (şi a cuplurilor concentrate) ce acționează de o parte a secțiunii, față de secțiune.

Dacă bara este privită din centrul de curbură, atunci convențiile de semne pentru eforturi coincid cu cele stabilite la bare drepte. Drept linie de referință pentru reprezentarea eforturilor se utilizează axa barei curbe. Diagramele se construiesc astfel încât ordonatele să fie orientate pe direcția razei (normale la axa barei). În diagrama momentelor încovoietoare, momentele pozitive se reprezintă spre centrul de curbură, pe partea barei întinsă prin încovoiere.

Exemplul 2.4

Se vor construi diagramele de eforturi la bara semicirculară din fig. 2.21, *a*.

Se calculează reacțiunile

$$H_1 = F, \quad V_1 = F/2, \quad V_2 = F/2.$$

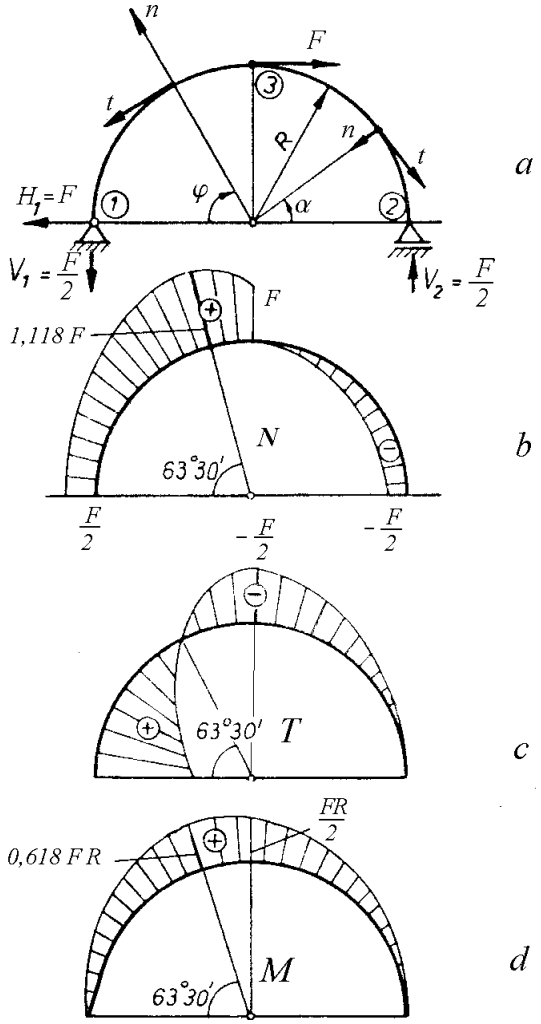


Fig. 2.21

Se scriu expresiile analitice ale eforturilor într-o secțiune oarecare :

$$N_{13} = F\sin\varphi + \frac{F}{2}\cos\varphi, \qquad T_{13} = F\cos\varphi - \frac{F}{2}\sin\varphi,$$

$$M_{13} = F\,R\sin\varphi - \frac{F}{2}R\left(1-\cos\varphi\right),$$

$$N_{32} = -\frac{F}{2}\cos\alpha, \qquad T_{32} = -\frac{F}{2}\sin\alpha, \qquad M_{32} = \frac{F}{2}R\left(1-\cos\alpha\right).$$

Se calculează valorile eforturilor în secţiunile *1*, *2* şi *3* :

$$N_1 = \frac{F}{2}, \qquad T_1 = F, \qquad M_1 = 0,$$

$$N_2 = -\frac{F}{2}, \qquad T_2 = 0, \qquad M_2 = 0,$$

$$N_{3-\varepsilon} = F, \qquad N_{3+\varepsilon} = 0, \qquad T_3 = -\frac{F}{2}, \qquad M_3 = \frac{F\,R}{2}.$$

Se trasează mai întâi, aproximativ, diagramele *N*, *T*, *M*, unind cu linii continue ordonatele punctelor obţinute pe baza valorilor de mai sus.

Se observă că $T_{13} = 0$ la $\varphi = \operatorname{arctg} 2 = 63^\circ 30'$. În această secţiune se calculează $N_{max} = 1{,}118\,F$ şi $M_{max} = 0{,}618\,F\,R$, după care se corectează diagramele (fig. 2.21, *b*, *c*, *d*)..

Pentru claritate, la diagramele *T* şi *M* s-a inversat convenţia de semne. Astfel, forţele tăietoare pozitive apar pe partea concavă a barei, iar momentele încovoietoare pozitive apar pe partea convexă a barei.

3.
TENSIUNI ŞI DEFORMAȚII SPECIFICE

Eforturile în bare sunt mărimi convenționale, aplicate în centrele de greutate ale secțiunilor transversale ale barelor, fiind independente de forma şi dimensiunile acestora. În realitate, solicitările interioare se manifestă prin acțiuni distribuite pe toată suprafața secțiunii transversale. Ele se caracterizează prin *tensiuni normale* şi *tensiuni tangențiale*, care reprezintă forțele interioare pe unitatea de suprafață.

Dimensionarea componentelor maşinilor şi construcțiilor metalice se bazează pe valori admisibile ale tensiunilor care pot acționa într-un material supus la sarcini exterioare. Pentru corpuri de grosimi mici şi cu anumite simetrii, tensiunile se pot calcula numai din considerații de echilibru. În general însă, tensiunile depind de deformațiile corpurilor. Valorile locale adimensionale ale deformațiilor corpurilor se numesc *deformații specifice.* La corpuri elastice deformațiile specifice sunt proporționale cu tensiunile care le produc.

3.1 Tensiuni

Pentru a caracteriza solicitarea din interiorul unui corp elastic, determinată de aplicarea unor sarcini exterioare, se secționează corpul (fig. 3.1, *a*) şi prin separarea celor două părți, se pun în evidență *forțele interioare*, care exprimă legătura între particulele din interiorul corpului, situate de o parte şi de cealaltă a planului de secționare (fig. 3.1, *b*).

Fie un element de suprafață ΔA, din planul secțiunii în al cărui centru de greutate P se aplică forța ΔF, rezultanta forțelor interioare ce acționează pe acest element, care în general este oblică față de elementul ΔA.

Prin definiție

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

reprezintă valoarea *tensiunii* în punctul *P*, pe suprafața de normală *n*.

Tensiunile sunt mărimi tensoriale care depind atât de valoarea forţei elementare dF cât şi de orientarea normalei n la suprafaţa dA. Pe o suprafaţă care trece prin P dar are altă orientare în spaţiu, tensiunea în punctul P este diferită.

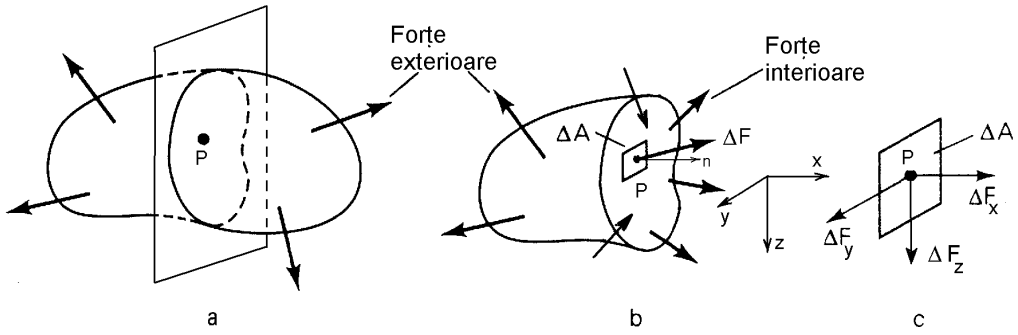


Fig. 3.1

Se descompune forţa ΔF în trei componente, ΔF_x - în lungul normalei la suprafaţă, paralelă cu axa x, ΔF_y şi ΔF_z - în planul suprafeţei transversale. Se definesc două tipuri de tensiuni, şi anume :

- tensiunea normală

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} = \frac{dF_x}{dA} \ , \qquad (3.1)$$

perpendiculară pe planul secţiunii transversale şi

- tensiunile tangenţiale :

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} = \frac{dF_y}{dA} \ , \qquad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} = \frac{dF_z}{dA} \ , \qquad (3.2)$$

situate în planul secţiunii transversale (fig. 3.2).

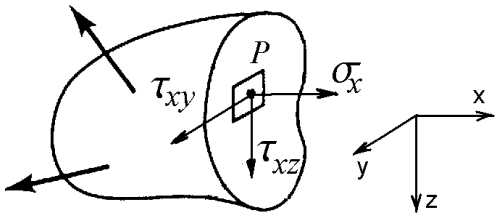


Fig. 3.2

În notaţia indicială, tensiunile normale au un singur indice, care defineşte axa cu care sunt paralele. Tensiunile tangenţiale au doi indici. Primul indice arată direcţia normalei la planul sau faţa pe care acţionează tensiunea. Al doilea indice arată direcţia componentei tensiunii.

Tensiunile normale σ pot fi comparate cu presiunea din fluide, iar cele tangenţiale τ - cu frecările care apar în planul de separaţie, în cazul mişcării relative a două corpuri în contact. Tensiunile se măsoară în unităţi de forţă împărţite la unităţi de arie, deobicei în MPa sau N/mm^2. În literatura engleză tensiunile se măsoară în *psi* şi *ksi*: 1 psi = 1 lbf/in^2; 1 psi (pound/inch^2)=6,8947 kPa; 1 ksi = 1kpsi = 6,8947 MPa.

O problemă centrală a Rezistenţei materialelor este *stabilirea legii de distribuţie a tensiunilor* pe secţiunea transversală a unei bare şi determinarea valorii acestora în funcţie de sarcinile exterioare aplicate barei şi caracteristicile geometrice ale secţiunii.

3.2 Convenţii de semne pentru tensiuni

Se va utiliza un sistem de axe *drept.* Convenţia de semne pentru tensiuni se bazează pe relaţia între direcţia normalei exterioare la o suprafaţă şi direcţiile componentelor tensiunilor care acţionează pe faţa respectivă.

Pe o *faţă pozitivă* (cu normala exterioară în sensul pozitiv al axei), tensiunile pozitive sunt dirijate în sensul pozitiv al axelor de coordonate. Pe o *faţă negativă*, tensiunile pozitive sunt orientate în sensul negativ al axelor de coordonate. Deci tensiunile de întindere sunt totdeauna pozitive, iar tensiunile de compresiune sunt totdeauna negative.

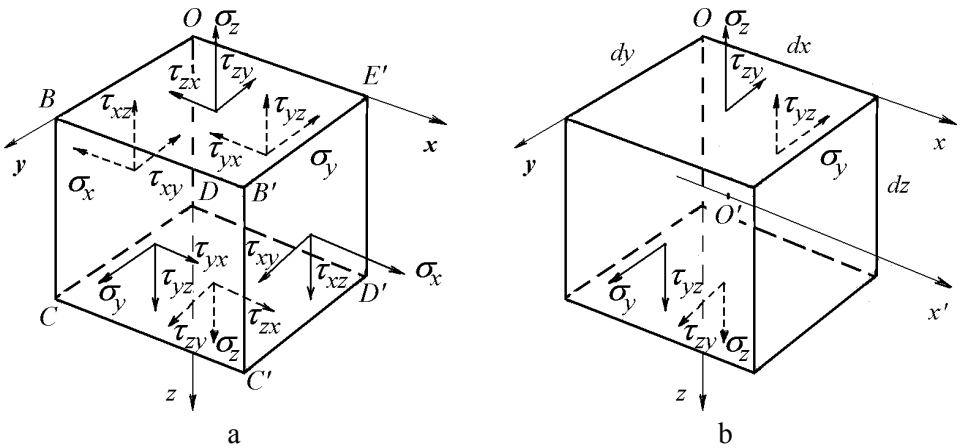


Fig. 3.3

În figura 3.3, *a* s-au pus în evidenţă componentele în lungul axelor de coordonate ale tensiunilor pozitive care acţionează pe feţele unui element de volum paralelipipedic. Pe faţa pozitivă *B′C′D′E′* tensiunile pozitive au sensul axelor de

coordonate. Pe faţa negativă *OBCD* tensiunile au sens contrar axelor de coordonate.

Dintre cele şase componente ale tensiunilor tangenţiale, se demonstrează că numai trei sunt diferite. Fie O' centrul paralelipipedului de laturi *dx*, *dy*, *dz* din figura 3.3, *b*, în care s-au desenat numai tensiunile care acţionează într-un plan perpendicular pe axa $O'x'$, paralelă cu *Ox*.

Se scrie ecuaţia de momente a forţelor faţă de axa $O'x'$

$$2\left(\tau_{yz}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\right)\frac{\mathrm{d}y}{2}-2\left(\tau_{zy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\frac{\mathrm{d}z}{2}=0\,,$$

de unde rezultă $\tau_{yz}=\tau_{zy}$. Relaţii similare se stabilesc în planele *xOz* şi *yOz*.

Componentele tensiunilor tangenţiale normale la muchia comună a două plane perpendiculare între ele sunt egale şi orientate ambele fie spre muchia comună fie în sens contrar.

Deci tensiunile tangenţiale sunt complementare două câte două

$$\tau_{xy}=\tau_{yx},\ \ \tau_{yz}=\tau_{zy},\ \ \tau_{zx}=\tau_{xz}\,. \qquad (3.3)$$

Se spune că relaţiile (3.3) exprimă *dualitatea* sau complementaritatea tensiunilor tangenţiale.

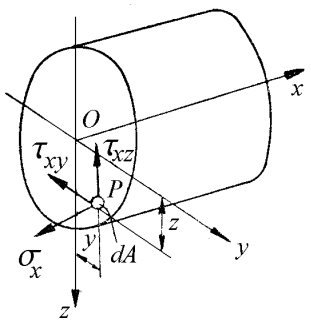


Fig. 3.4

3.3 Relaţii între eforturi şi tensiuni

Se consideră un element de suprafaţă infinitezimal d*A*. Într-un punct *P*, situat pe d*A*, acţionează tensiunea normală σ_x şi tensiunile tangenţiale τ_{xy} şi τ_{xz} (fig. 3.4). Pe elementul de suprafaţă d*A* acţionează forţele elementare $\sigma_x\,\mathrm{d}A$, $\tau_{xy}\,\mathrm{d}A$ şi $\tau_{xz}\,\mathrm{d}A$.

Astfel de forţe elementare sunt distribuite pe toată suprafaţa secţiunii transversale a barei. Reducându-le în centrul de greutate al secţiunii, se obţin *relaţiile de echivalenţă între eforturi şi tensiuni*. Acestea exprimă cele şase componente ale torsorului forţelor interioare în funcţie de tensiunile de pe elementul de suprafaţă dA, definit în jurul punctului de coordonate y şi z.:

$$N = \int_A \sigma_x \, \mathrm{d}A, \qquad M_{iy} = \int_A \sigma_x \, z \, \mathrm{d}A,$$

$$T_y = \int_A \tau_{xy} \, \mathrm{d}A, \qquad M_{iz} = -\int_A \sigma_x \, y \, \mathrm{d}A, \tag{3.4}$$

$$T_z = \int_A \tau_{xz} \, \mathrm{d}A, \qquad M_t = \int_A \left(\tau_{xz} \, y - \tau_{xy} \, z\right) \mathrm{d}A.$$

3.4 Sisteme de tensiuni static determinate

În majoritatea problemelor din Rezistenţa materialelor, calculul tensiunilor se face pe baza unor ipoteze simplificatoare privind deformaţiile, de exemplu, ipoteza secţiunii plane la bare. Există însă situaţii în care tensiunile se pot calcula utilizând doar ecuaţiile de echilibru. Este cazul problemelor simetrice privind recipienţi sub presiune cu pereţi subţiri sau răsucirea barelor cu pereţi subţiri de tip ţeavă. Acestea sunt *sisteme static determinate*. Valorile tensiunilor depind numai de dimensiunile corpului studiat şi de sarcinile exterioare. Rezultă formule de dimensionare în care grosimea peretelui se calculează pe baza unor valori admisibile ale tensiunilor maxime.

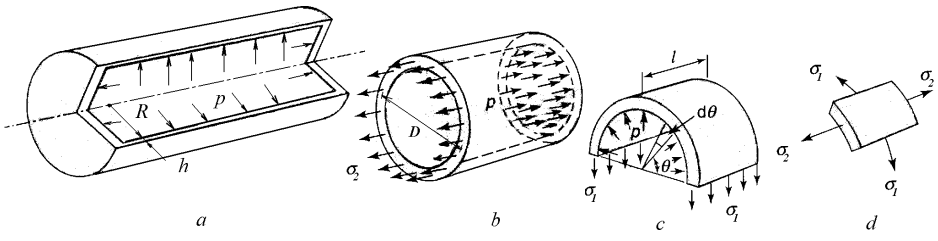


Fig. 3.5 [6]

3.4.1 Vas cilindric sub presiune interioară

Fie un vas cilindric de diametru $D = 2R$ solicitat la presiune interioară constantă p (fig. 3.5, *a*). Pereţii vasului au grosime constantă mică, $h << D$, deci se consideră că tensiunile sunt constante pe grosimea peretelui.

Asupra unui element detaşat din peretele vasului acționează (fig. 3.5, *d*) tensiuni normale circumferențiale σ_1, datorite "dilatării" vasului sub efectul presiunii interioare, şi tensiuni normale longitudinale σ_2, datorite efectului "capacelor" de la capetele vasului (fig. 3.5). Valorile acestor tensiuni se pot calcula din ecuațiile de echilibru axial şi circumferențial.

Echilibrul axial. Dacă se secționează vasul cu un plan perpendicular pe axa longitudinală (fig. 3.5, *b*) şi se izolează partea din dreapta, aceasta trebuie să fie în echilibru sub acțiunea forței axiale produse de presiunea *p* pe suprafața πR^2 şi a tensiunilor longitudinale σ_2 ce acționează în peretele vasului, pe suprafața inelară $2\pi R h$.

Ecuația de proiecții a forțelor pe axa longitudinală a vasului se scrie

$$p\,\pi R^2 = \sigma_2\, 2\pi R\, h\,,$$

de unde rezultă

$$\sigma_2 = \frac{pR}{2h} = \frac{pD}{4h}. \qquad (3.5)$$

Echilibrul circumferențial. Se secționează vasul cu un plan longitudinal orizontal care trece prin axa vasului (fig. 3.5, *c*), apoi din partea superioară se detaşează o porțiune de lungime ℓ. Pe un element de suprafață $\ell R\,\mathrm{d}\theta$ acționează forța $p\,\ell R\,\mathrm{d}\theta$ care face unghiul θ cu orizontala. Componenta verticală este $p\,\ell R\,\mathrm{d}\theta\cdot\sin\theta$. Suma forțelor de presiune este echilibrată de cele două forțe $\sigma_1 h\,\ell$ produse de tensiunile circumferențiale. Ecuația de proiecții a forțelor pe diametrul vertical se scrie

$$\int_0^{\pi} pR\,\ell\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = p\,2R\,\ell = 2\,\sigma_1\, h\,\ell\,,$$

de unde rezultă

$$\sigma_1 = \frac{pR}{h} = \frac{pD}{2h} = \sigma_{max}\ . \qquad (3.6)$$

Dacă se atribuie lui σ_{max} valoarea admisibilă σ_a, rezultă grosimea vasului

$$h = \frac{pD}{2\,\sigma_a}. \qquad (3.7)$$

În practică, la această valoare se adaugă adaosuri tehnologice, adaosuri de coroziune etc., deci în final grosimea vasului este mai mare decât valoarea calculată cu ajutorul formulei (3.7).

3.4.2 Inel subțire în rotație

Inelul din figura 3.6, *a* are raza medie R, aria secțiunii transversale A şi se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω .

Pentru calculul tensiunilor circumferențiale σ din inel, se aplică principiul lui d'Alembert. Asupra unui element de lungime $R\,\mathrm{d}\theta$ (fig. 3.6, *b*) acționează forța centrifugă

$$\mathrm{d}F = R\omega^2\,\mathrm{d}m = R\omega^2\rho\,A\,R\,\mathrm{d}\theta\,,$$

unde ρ este densitatea materialului.

Tensiunile normale produc forțe circumferențiale σA ale căror componente radiale sunt echilibrate de forța centrifugă

$$2\sigma\,A\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2} \cong 2\sigma\,A\frac{\mathrm{d}\theta}{2} = \rho\,A\omega^2R^2\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Rezultă valoarea tensiunii normale de întindere din inel

$$\sigma = \rho\,R^2\omega^2 = \rho\,v^2\,, \tag{3.8}$$

unde v este viteza tangențială a centrului secțiunii transversale.

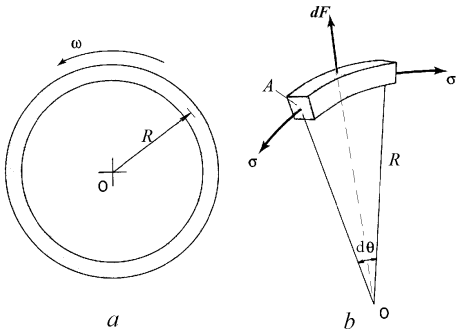


Fig. 3.6

De notat că valoarea tensiunii normale din inelul în rotație este independentă de forma şi suprafața secțiunii transversale. Pentru o valoare maximă admisibilă a tensiunii normale din inel, din relația (3.8) se poate calcula viteza unghiulară maximă admisibilă pentru un inel de rază medie dată. Dacă ω este impus, din relația (3.8) se obține raza inelului, element constructiv de bază al volantului utilizat la uniformizarea turației motoarelor cu ardere internă.

3.4.3 Învelişuri subţiri sub presiune

Învelişurile sunt corpuri mărginite de două suprafeţe curbe învecinate, distanţa între ele fiind mică în comparaţie cu dimensiunile suprafeţelor. În continuare se consideră învelişuri de rotaţie (axial-simetrice) sub presiune, care lucrează ca o membrană, în aşa-numita "stare fără momente". În peretele învelişului există doar tensiuni normale de întindere, denumite "tensiuni de membrană", uniform distribuite pe grosimea acestuia.

Pentru realizarea stării fără momente, trebuie îndeplinite următoarele condiţii: a) forma învelişului să fie lină, fără variaţii bruşte ale razelor de curbură; b) sarcinile exterioare să fie uniform distribuite sau variabile lent, excluzând forţele şi momentele concentrate; c) marginile învelişului să fie astfel rezemate încât reacţiunile să nu aibă componente transversale importante şi să nu apară reacţiuni momente; d) învelişul să nu aibă margini deschise libere.

La un înveliş cu suprafaţa mediană de forma unui corp de rotaţie, *meridianele* sunt liniile obţinute prin intersecţia suprafeţei cu plane care trec prin axa de rotaţie. Liniile perpendiculare pe meridiane sunt cercuri şi se numesc *paralele*.

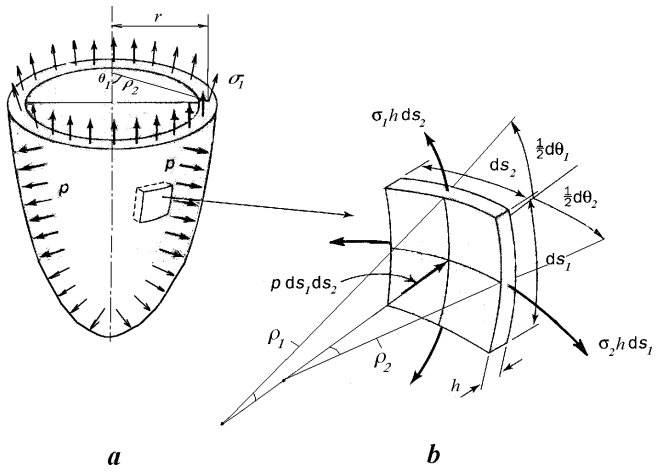


Fig. 3.7

Fie un înveliş axial-simetric sub presiune (fig. 3.7, *a*) încărcat simetric, deci cu presiune constantă pe un cerc paralel. Se decupează din înveliş un element mărginit de două meridiane şi două paralele (fig. 3.7, *b*) astfel încât unghiul celor două raze meridiane să fie $d\theta_1$ iar unghiul razelor paralele să fie $d\theta_2$. Se notează: σ_1 - tensiunile meridiane, σ_2 - tensiunile circumferenţiale, ρ_1, raza de curbură a

meridianului, ρ_2, raza de curbură a paralelului, h - grosimea peretelui. Raza ρ_2 face unghiul θ_1 cu axa vasului.

Se scrie echilibrul forţelor care acţionează asupra elementului de înveliş. Asupra laturilor acţionează forţele $\sigma_1 h \, \mathrm{d}s_2$ şi $\sigma_2 h \, \mathrm{d}s_1$, tangente la suprafaţa mediană, unde $\mathrm{d}s_1 = \rho_1 \, \mathrm{d}\theta_1$ şi $\mathrm{d}s_2 = \rho_2 \, \mathrm{d}\theta_2$. Componentele lor dirijate spre centrele de curbură $\sigma_1 h \rho_2 \, \mathrm{d}\theta_2 \sin\dfrac{\mathrm{d}\theta_1}{2}$ şi $\sigma_2 h \rho_1 \, \mathrm{d}\theta_1 \sin\dfrac{\mathrm{d}\theta_2}{2}$ sunt echilibrate de forţa datorită presiunii interioare $p \, \mathrm{d}s_1 \, \mathrm{d}s_2$. Pentru valori mici ale unghiurilor $\mathrm{d}\theta_1$ şi $\mathrm{d}\theta_2$, sinusurile se pot înlocui cu unghiurile exprimate în radiani. Ecuaţia de echilibru a forţelor se scrie

$$2\sigma_1 h \rho_2 \, \mathrm{d}\theta_2 \, \mathrm{d}\theta_1 + 2\sigma_2 h \rho_1 \, \mathrm{d}\theta_1 \, \mathrm{d}\theta_2 = p \, \rho_1 \, \mathrm{d}\theta_1 \, \rho_2 \, \mathrm{d}\theta_2$$

sau

$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{h}, \tag{3.9}$$

fiind cunoscută sub numele de *ecuaţia lui Laplace*.

Pentru calculul tensiunilor σ_1 şi σ_2 mai este necesară o ecuaţie de echilibru, a cărei formă depinde de configuraţia şi încărcarea învelişului studiat.

La un vas cu presiune interioară constantă, se scrie echilibrul forţelor pe verticală (fig. 3.7, *a*)

$$2\pi r h \sigma_1 \sin\theta_1 = p \pi r^2,$$

unde raza cercului paralel

$$r = \rho_2 \sin\theta_1.$$

Rezultă

$$\sigma_1 = \frac{p \rho_2}{2h}, \tag{3.10}$$

apoi, din relaţia (3.6), se calculează σ_2.

3.4.4 Răsucirea unui tub circular subţire

Răsucirea barelor este o problemă static nedeterminată, aşa cum este tratată în general în Capitolul 6. Totuşi, dacă raza unui tub circular este mare în comparaţie cu grosimea (de ex., de zece ori mai mare), atunci se poate considera că tensiunile sunt constante pe grosimea peretelui, iar problema devine static determinată.

În figura 3.8, un tub de rază medie R şi grosime a peretelui h este solicitat la răsucire de cupluri egale şi de sens contrar M_t aplicate la capete. Secționând tubul cu un plan perpendicular pe axa longitudinală, în secțiunea transversală se introduc tensiuni tangențiale care, din motive de simetrie, au valoare constantă în lungul conturului.

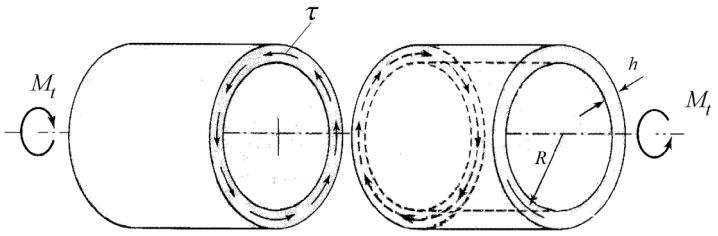


Fig. 3.8

Ecuația de echilibru a momentelor ce acționează asupra unei părți a barei se scrie

$$M_t = \tau \, 2\pi R \, h \, R \ ,$$

de unde se obține expresia tensiunilot tangențiale din tubul răsucit

$$\tau = \frac{M_t}{2\,\pi\, h\, R^2} \, . \qquad (3.11)$$

3.4.4 Forfecarea unui bolț

În îmbinarea cu tijă găurită şi furcă din figura 3.9, *a*, bolțul este forfecat ca în figura 3.9, *b*. Se consideră că tensiunile tangențiale τ sunt uniform distribuite pe suprafețele de forfecare (ceea ce contravine complementarității tensiunilor tangențiale).

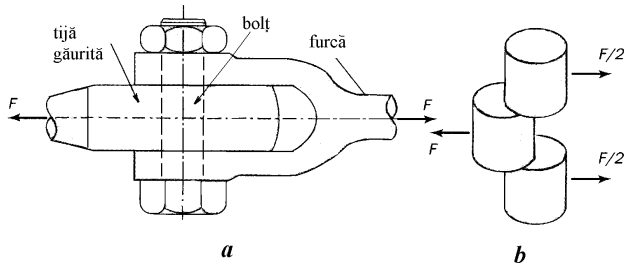


Fig. 3.9

Valoarea medie este

$$\tau = \frac{F}{2A}, \tag{3.12}$$

unde A este suprafaţa secţiunii transversale a bolţului. Alegând o valoare maximă admisibilă pentru τ, cu ajutorul formulei (3.12) se dimensionează bolţul.

3.5 Deformaţii specifice

Se consideră un corp deformabil, rezemat astfel încât să nu se poată deplasa ca un corp rigid (fig. 3.10). În acest caz, deplasările punctelor materiale din corp vor fi produse numai de deformaţiile care apar sub efectul sarcinilor exterioare aplicate.

3.5.1 Alungirea specifică

Fie punctele B şi C, situate la distanţa ℓ în corpul elastic nedeformat (fig. 3.10).

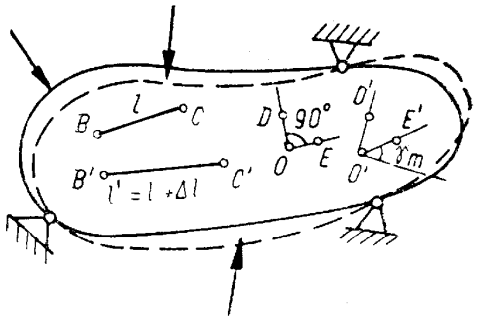


Fig. 3.10

După aplicarea sarcinilor exterioare, corpul se deformează, punctul B deplasându-se in B', iar C în C'. Distanţa între cele două puncte devine ℓ'.

Diferenţa între lungimea finală ℓ' şi cea iniţială ℓ a segmentului considerat se numeşte *alungire*:

$$\Delta \ell = \ell' - \ell . \tag{3.13}$$

Raportul între alungirea $\Delta \ell$ şi lungimea inițială ℓ se numeşte *alungire specifică medie*:

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta \ell}{\ell}. \tag{3.14}$$

La limită, când $\ell \to 0$, se obține alungirea specifică în punctul *B*, pe direcția *BC*:

$$\varepsilon_{BC} = \lim_{\ell \to 0} \frac{\Delta \ell}{\ell}. \tag{3.15}$$

În general, alungirea în punctul *B*, pe altă direcție, este diferită.

Alungirile specifice ε sunt produse de tensiuni normale σ şi determină modificarea volumului corpului elastic.

3.5.2 Lunecarea specifică

Fie unghiul drept format de segmentele *OD* şi *OE* în corpul elastic nedeformat (fig. 3.10). După aplicarea sarcinilor exterioare, punctele se deplasează iar unghiul considerat devine $\angle D'O'E'$.

Unghiul γ_m, care măsoară variația unghiului de 90^o în urma deformației corpului, se numeşte (unghi de) lunecare medie:

$$\gamma_m = \angle DOE - \angle D'O'E'. \tag{3.16}$$

La limită, când segmentele $OD \to 0$, $OE \to 0$, se obține (unghiul de) *lunecarea specifică* în punctul *O*, în planul *DOE*:

$$\gamma_{DOE} = \lim_{\substack{OD \to 0 \\ OE \to 0}} \left(\angle DOE - \angle D'O'E' \right) \tag{3.17}$$

Lunecările specifice γ sunt produse de tensiunile tangențiale τ şi determină modificarea formei corpului.

Între deformații specifice şi deplasările punctelor corpului elastic se stabilesc relații geometrice (cinematice). Eliminând deplasările se obțin *relații de compatibilitate* între alungirile specifice şi lunecările specifice.

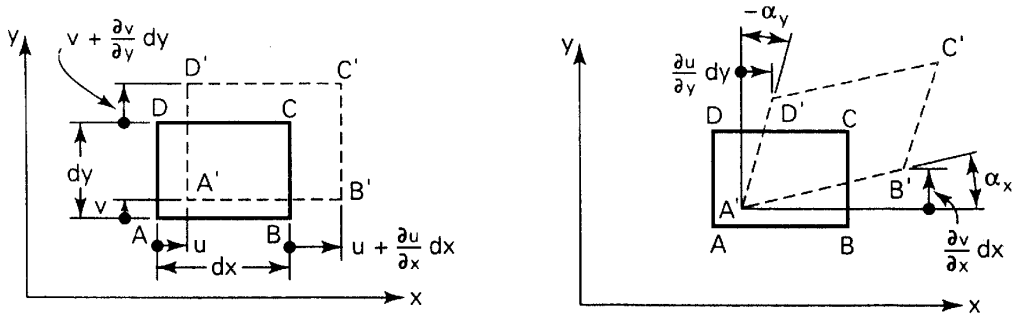
3.5.3 Relații între deformații specifice şi deplasări

Fie un element de dimensiuni *dx*, *dy* şi grosime egală cu 1 (fig. 3.11), detaşat dintr-un corp elastic. Sub acțiunea sarcinilor aplicate, apar două feluri de

deformații, care vor fi tratate separat: lungimile laturilor se modifică (fig. 3.11, *a*) iar elementul se distorsionează, laturile sale rotindu-se relativ (fig. 3.11, *b*).

Latura *AB*, de lungime inițială *dx*, se deplasează în poziția *A'B'*, alungirea sa fiind egală cu diferența deplasărilor capetelor $\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\right)-u$. Împărțind alungirea la lungimea inițială se obține alungirea specifică pe direcția *x*, apoi, printr-un calcul analog, alungirea specifică pe direcția *y*

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{3.18}$$



a b

Fig. 3.11

Pentru calculul lunecării specifice, se consideră variația unghiului drept $\angle BAD$ (fig. 3.11, *b*). Rotirea laturii *AB* este $\alpha_x\cong \operatorname{tg}\alpha_x=\frac{\partial v}{\partial x}$, în timp ce rotirea laturii *AD* este $-\alpha_y=\frac{\partial u}{\partial y}$. Variația totală a unghiului drept $\angle BAD$ este lunecarea specifică în planul *xOy*

$$\gamma_{xy}=\alpha_x-\alpha_y=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{3.19}$$

Lunecările specifice sunt pozitive atunci când unghiul drept descreşte.

Pentru un element paralelipipedic cu laturile *dx*, *dy*, *dz*, se stabilesc relațiile

$$\begin{gathered}\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\\ \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\qquad \gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z},\\ \gamma_{xy}=\gamma_{yx},\qquad \gamma_{yz}=\gamma_{zy},\qquad \gamma_{zx}=\gamma_{xz}.\end{gathered} \tag{3.20}$$

Eliminând deplasările din relațiile (3.20) se obțin relații între deformațiile specifice, numite *ecuații de compatibilitate*. În planul *xOy* se obține

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \qquad (3.21, a)$$

Se mai stabilesc relații de forma

$$2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right). \qquad (3.21, b)$$

3.6 Relații între tensiuni şi deformații specifice

Pentru solicitări de mică intensitate şi la o serie de materiale utilizate în practica inginerească, între tensiuni şi deformații specifice se stabilesc relații liniare cunoscute sub numele de *legea lui Hooke*.

Relația între tensiuni normale şi alungiri specifice are forma

$$\sigma = E\,\varepsilon \qquad (3.22)$$

unde E este *modulul de elasticitate longitudinal* (modulul lui Young) al materialului.

Relația între tensiuni tangențiale şi lunecări specifice are forma

$$\tau = G\,\gamma \qquad (3.23)$$

unde G este *modulul de elasticitate transversal* (modulul de forfecare) al materialului.

Deoarece deformațiile specifice sunt mărimi adimensionale, modulele de elasticitate au aceleaşi dimensiuni ca tensiunile, deci se măsoară în unități de forță împărțite la unități de suprafață sau în Pascal. Valori uzuale la oțel sunt E=210 GPa şi G=81 GPa. Pentru alte materiale se dau valori orientative în Tabelul 3.1.

Tabelul 3.1

	Materialul	*E*, GPa	*G*, GPa
1	oțeluri	190 - 208	77 - 83
2	cupru	110 - 120	37 - 46
3	aluminiu	69 - 70	24 - 28
4	sticlă	50 - 80	20 - 35
5	polistiren	1,1 - 3,3	0,4 - 1,2

Relațiile între tensiuni şi deformații specifice pentru starea tridimensională de tensiuni sunt prezentate în Capitolul 9.

4.

CARACTERISTICI MECANICE LA ÎNCĂRCĂRI MONOTONE

O serie de încercări mecanice relativ simple sunt folosite pentru evaluarea proprietăților materialelor. Rezultatele sunt utilizate în proiectarea inginerească şi ca bază în compararea şi alegerea materialelor.

Încercările la tracțiune se fac pentru evaluarea constantelor elastice, a rezistenței, ductilității şi întăririi materialelor. Se determină modulul de elasticitate, E, ca o măsură a rigidității, limita de curgere, σ_c, care defineşte rezistența la apariția deformațiilor plastice, şi rezistența la tracțiune, σ_r, cea mai mare tensiune convențională care poate exista în material. Coeficientul lui Poisson, ν, poate fi calculat dacă se măsoară şi deformația specifică transversală. Alungirea la rupere caracterizează ductilitatea materialului, capacitatea de a se deforma fără să se rupă. Coeficientul de rezistență, K, şi coeficientul de ecruisare, n, caracterizează materialele cu întărire, deformate elasto-plastic.

Încercările la compresiune se fac pentru evaluarea unor proprietăți similare la materiale solicitate în principal la compresiune, ca betonul şi piatra de construcții, sau la materiale fragile, ca sticla şi ceramicele. Încercarea de rezistență la forfecare pură permite măsurarea modulului de elasticitate transversal G, a limitei de curgere şi a rezistenței de rupere la forfecare pură.

Încercările de duritate, reziliență, încovoiere sau răsucire nu fac obiectul acestui curs.

4.1 Încercarea la tracțiune monoaxială

Pentru stabilirea relației între tensiunile normale σ şi alungirile specifice ε, se face *încercarea la tracțiune* (la materiale metalice, conform *SR EN* 10002-1). Se utilizează o epruvetă, având forma din figura 4.1, la care se cunoaşte aria

secțiunii transversale inițiale A_o în porțiunea centrală calibrată şi pe care se marchează două repere la distanța L_o.

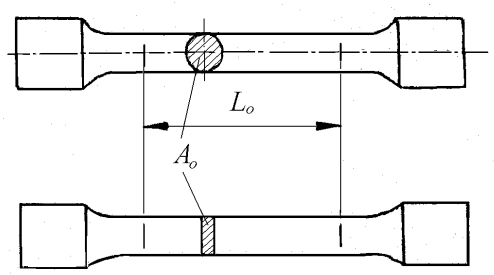


Fig. 4.1

Epruveta se obține, în general, prin prelucrarea unei probe dintr-un semifabricat turnat. Produsele cu secțiuni constante (profile, bare, sârme etc.) precum şi epruvetele brute turnate (de exemplu: fonte, aliaje neferoase) pot fi supuse încercării fără a fi prelucrate. Secțiunea transversală a epruvetelor poate fi circulară, pătrată, dreptunghiulară, inelară, sau, în cazuri speciale, de alte forme.

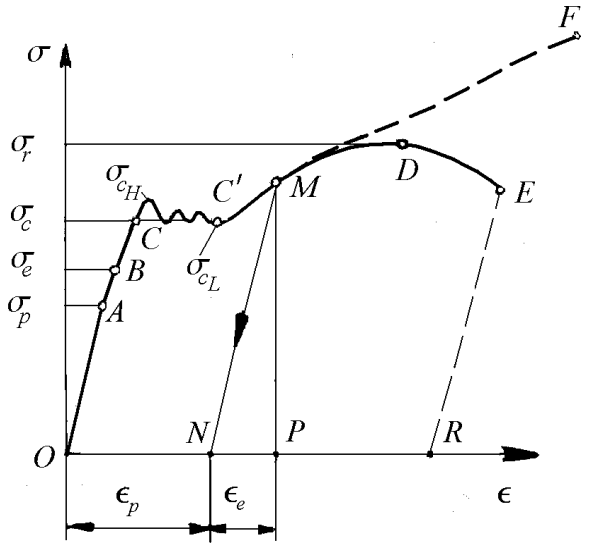


Fig. 4.2

Epruveta se montează într-o maşină de încercat la tracțiune, cu ajutorul căreia se aplică pe direcția axei longitudinale o forță de întindere F, care în timpul încercării creşte continuu, fără şoc sau vibrații, până se produce ruperea epruvetei. Concomitent se măsoară distanța între repere L, respectiv alungirea (extensia) epruvetei $\Delta L = L - L_o$, cu ajutorul unui extensometru.

Dacă se reprezintă grafic forța de întindere F în funcție de alungirea ΔL, se obține o diagramă care depinde de dimensiunile epruvetei, deci care nu caracterizează numai comportarea materialului încercat.

Dacă se reprezintă grafic dependența între tensiunea normală $\sigma = \frac{F}{A_o}$ şi alungirea specifică $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_o}$, atunci se obține *curba caracteristică a materialului* (fig. 4.2), denumită şi *diagrama încercării la tracțiune*. Aceasta este o curbă *convențională*, deoarece tensiunea se calculează pe baza ariei secțiunii inițiale A_o a epruvetei, iar alungirea specifică - pe baza lungimii inițiale între repere L_o, mărimi mai uşor de măsurat.

De notat că în unele manuale de Rezistența materialelor şi în unele standarde de încercări de materiale (de exemplu: STAS 6605-78) mărimea $\Delta L = L - L_o$ se numeşte *lungire*, iar $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_o}$ se numeşte lungire specifică sau *alungire*.

4.1.1 Caracteristici mecanice la încărcări monotone

Pe curba din figura 4.2, care corespunde unui oțel cu conținut redus de carbon, s-au marcat câteva puncte importante, ale căror ordonate definesc unele caracteristici mecanice ale materialului.

a) *Limita de proporționalitate* σ_p este valoarea tensiunii până la care relația între σ şi ε este liniară (ordonata punctului A). Ecuația porțiunii OA a curbei caracteristice se poate scrie sub forma legii lui Hooke (3.22)

$$\sigma = E\,\varepsilon \qquad (4.1)$$

a cărei pantă E este *modulul de elasticitate longitudinal* al materialului.

b) *Limita de elasticitate* σ_e este valoarea tensiunii până la care materialul se comportă elastic (ordonata punctului B), deci până la care deformațiile sunt reversibile. La unele materiale se definește o *limită de elasticitate convențională* $\sigma_{0,01}$. Aceasta reprezintă valoarea tensiunii la care apar local primele deformații plastice, căreia îi corespunde, după descărcarea epruvetei, o alungire specifică remanentă de 0,01% ($100\,\mu\mathrm{m}/\mathrm{m}$).

Pentru majoritatea materialelor utilizate în construcția de maşini, limita de elasticitate este foarte apropiată de limita de proporționalitate, deşi cele două mărimi sunt definite diferit. De asemenea, unele materiale pot avea o comportare elastică (revin după descărcare la dimensiunile inițiale), însă neliniară. De

exemplu, particulele filamentare denumite *whiskers* pot avea deformații specifice elastice până la 2%.

c) *Limita de curgere aparentă* σ_c este valoarea tensiunii la care epruveta începe să se deformeze apreciabil sub sarcină constantă (ordonata punctului *C*), macând apariția deformațiilor plastice ireversibile. Porțiunea *CC'* a curbei caracteristice se numeşte *palier de curgere*. Se disting *limita de curgere superioară*, σ_{cH}, definită de valoarea tensiunii în momentul când se observă prima scădere a forței aplicate epruvetei, şi *limita de curgere inferioară*, σ_{cL}, valoarea cea mai mică a tensiunii în timpul curgerii plastice, neglijând în acest timp eventualele fenomene tranzitorii.

La unele materiale, palierul de curgere nu există, curba caracteristică având alura din figura 4.3. Se defineşte o *limită de curgere convențională* $\sigma_{0,2}$. Aceasta reprezintă valoarea tensiunii căreia îi corespunde, după descărcarea epruvetei, o alungire specifică remanentă de 0,2% (2 mm / m).

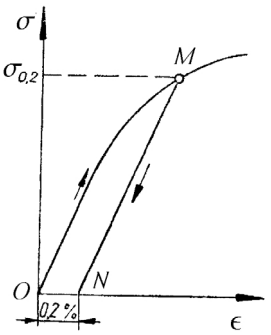


Fig. 4.3

d) *Rezistența la tracțiune* σ_r, denumită şi *rezistență la rupere,* este tensiunea corespunzătoare forței maxime înregistrate în cursul încercării după depăşirea limitei de curgere (ordonata punctului *D* din fig. 4.2).

Limitele şi rezistențele definite pe baza curbei caracteristice convenționale sunt constante de material, deci valori fixe ale tensiunii normale. Pentru a le distinge de tensiunile de întindere variabile σ, acestea se notează uneori diferit. În încercarea materialelor se folosesc următoarele notații: rezistența la tracțiune $\sigma_r = R_m$, limita de curgere $\sigma_c = R_e$, limita de curgere convențională $\sigma_{0,2} = R_{p0,2}$ (conform *SR EN* 10002-1).

Porțiunea *C'D* a curbei caracteristice se numeşte zonă de *întărire* sau zonă de *ecruisare,* deoarece marchează o creştere a rezistenței opuse de material la creşterea deformației plastice după depăşirea palierului de curgere.

Punctul *E* marchează ruperea epruvetei. Aparent, ruperea se produce la o valoare a tensiunii inferioară rezistenței la tracțiune. Aceasta se datoreşte faptului că se trasează o curbă caracteristică convențională, calculând tensiunea prin împărțirea forței *F* la aria inițială A_o a secțiunii transversale.

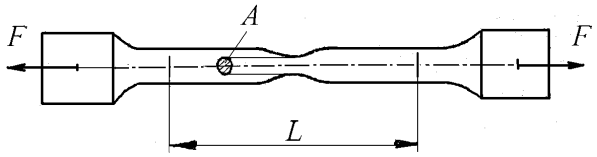


Fig. 4.4

Când forța se apropie de valoarea corespunzătoare punctului *D*, într-o secțiune a epruvetei apare o gâtuire, ilustrată în figura 4.4, care devine tot mai pronunțată până se produce ruperea. Aria secțiunii transversale scăzând, *tensiunea reală* în secțiunea de rupere creşte peste valoarea convențională, astfel că, în momentul ruperii epruvetei, ea are într-adevăr valoarea maximă mai mare ca σ_r.

Curba caracteristică reală este desenată cu linie întreruptă în figura 4.2.

În cazul când epruveta este solicitată peste limita de curgere, până la tensiunea corespunzătoare punctului *M*, apoi este descărcată, se constată că linia de descărcare *MN* este paralelă cu linia *OA* - porțiunea inițială a curbei caracteristice (Fig. 4.2). După descărcare, atunci când $\sigma = 0$, epruveta nu revine la dimensiunile inițiale. Segmentul $ON = \varepsilon_p$ caracterizează deformația specifică plastică (ireversibilă), în timp ce segmentul $NP = \varepsilon_e$ caracterizează deformația specifică elastică (reversibilă) a epruvetei încărcate până la tensiunea corespunzătoare punctului *M*. Se spune că materialul a fost încărcat *elasto-plastic*.

La o nouă încărcare, punctul care defineşte starea materialului parcurge întâi dreapta *NM*, apoi revine pe curba *MDE* astfel că, aparent, limita de proporționalitate corespunde punctului *M*. Materialul se comportă liniar până la tensiuni superioare limitei de curgere, fiind *ecruisat*, proprietate utilizată în practică.

Segmentul *OR* măsoară *alungirea specifică la rupere*, mărime ce caracterizează *ductilitatea* materialului, deci proprietatea de a se deforma mult fără să se rupă. O altă măsură a ductilității este coeficientul de gâtuire

$$Z = \frac{A_o - A_u}{A_o} \cdot 100 \qquad (4.2)$$

unde A_u, aria ultimă, este aria minimă a secțiunii după rupere.

La materialele *tenace*, care au deformații plastice mari înainte de rupere, porțiunea *CDE* a curbei caracteristice este relativ extinsă. La materialele *fragile*, porțiunea *CDE* lipseşte, ruperea producându-se fără apariția deformațiilor plastice.

În practica inginerească se urmăreşte ca tensiunile maxime din piese să nu depăşească limita de curgere - la materiale tenace, sau rezistența la rupere - în cazul materialelor fragile. Aceste două caracteristici mecanice ale materialelor stau la baza definirii *rezistențelor admisibile*, tensiunile maxime ce pot exista într-un corp şi a *sarcinilor limită* ce pot acționa asupra unui element de structură sau maşină, în condiții date de funcționare şi mediu ambiant.

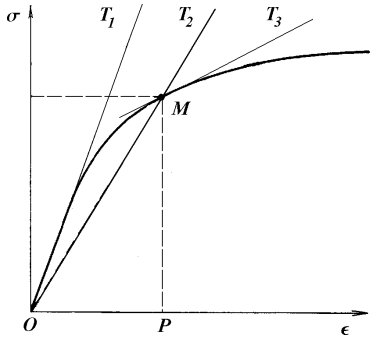


Fig. 4.5

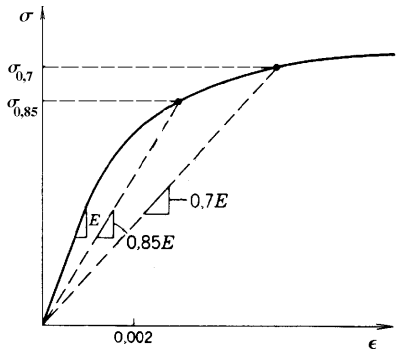


Fig. 4.6

O grupă mare de materiale, printre care se pot aminti alama, cuprul, aliajele de aluminiu, betonul şi cauciucul, prezintă curbe caracteristice ca în figura 4.5, cu un traseu curbiliniu până la rupere. Pentru acestea se definesc:

1) modulul de elasticitate tangent

$$E_t = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}, \tag{4.3}$$

dat de panta tangentei MT_1;

2) modulul de elasticitate secant

$$E_s = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OP}}, \tag{4.4}$$

dat de panta secantei OT_2.

Deobicei se utilizează modulul de elasticitate în origine, E, dat de panta tangentei OT_3 în origine la curba caracteristică, denumit *modulul lui Young*. Valorile modulelor E_t şi E_s depind de nivelul tensiunii la care se măsoară.

4.1.2 Formula Ramberg-Osgood

În multe cazuri este utilă o relație analitică între tensiuni şi deformații specifice, care să descrie curba caracteristică a unui material şi în zona neliniară. Se utilizează relații de forma

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{\sigma}{E} + \beta \left(\frac{\sigma}{E} \right)^n$$

în care E, β şi n sunt constante de material care se determină experimental.

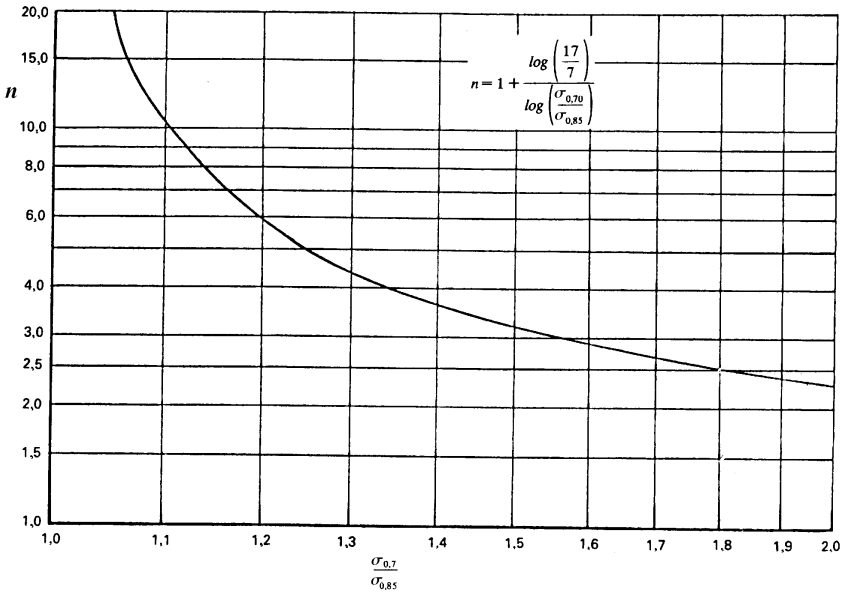


Fig. 4.7

În calculul structurilor aeronautice este utilizată formula Ramberg-Osgood. Impunând aceeaşi pantă în origine, E, ceilalți doi parametri se determină printr-o metodă de colocație, din condiția ca cele două curbe, analitică şi experimentală, să treacă prin punctele în care modulul secant este $0{,}7E$, respectiv $0{,}85E$ (fig. 4.6).

Rezultă

$$\frac{E\,\varepsilon}{\sigma_{0,7}} = \frac{\sigma}{\sigma_{0,7}} + \frac{3}{7}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0,7}} \right)^n \qquad (4.5)$$

unde

$$n = 1 + \frac{\log\left(\frac{17}{7}\right)}{\log\left(\frac{\sigma_{0,7}}{\sigma_{0,85}}\right)} \tag{4.6}$$

iar $\sigma_{0,7}$ şi $\sigma_{0,85}$ sunt ordonatele punctelor de intersecție a curbei caracteristice cu liniile secante de pantă 0,7*E*, respectiv 0,85*E*.

Diagrama exponentului *n* în funcție de raportul $\frac{\sigma_{0,7}}{\sigma_{0,85}}$ este dată în figura 4.7.

Pe baza relațiilor (4.5) şi (4.6) se pot defini algebric modulul secant

$$E_s = \frac{E}{1 + \frac{3}{7}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0,7}}\right)^{n-1}} \tag{4.7}$$

şi modulul tangent

$$E_t = \frac{E}{1 + \frac{3n}{7}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{0,7}}\right)^{n-1}}. \tag{4.8}$$

Rezultă că sunt suficiente trei valori *E*, $\sigma_{0,7}$ şi $\sigma_{0,85}$, măsurate pe o curbă caracteristică determinată experimental, pentru a stabili relația (4.5) care reprezintă o bună aproximare a curbei $\sigma - \varepsilon$ a materialului până la apariția gâtuirii.

4.2 Contracția transversală

Se constată că, odată cu lungirea (scurtarea) unei epruvete, apare o micşorare (creştere) a dimensiunilor suprafeței secțiunii transversale, proporțională cu alungirea epruvetei. La o deformație specifică ε în lungul axei barei, corespunde o deformație specifică transversală

$$\varepsilon_t = -\nu\,\varepsilon, \tag{4.9}$$

unde ν se numeşte *coeficient de contracție transversală* (coeficientul lui Poisson). În general $\nu = 0...0{,}5$. La oțeluri $\nu \cong 0{,}3$ iar la materialele utilizate curent în practică $\nu = 0{,}25...0{,}33$. La cauciucuri $\nu \to 0{,}5$. La fel, la încărcări peste limita de proporționalitate, ν creşte progresiv şi tinde spre 0,5 la deformații plastice mari.

Între caracteristicile elastice ale materialelor izotrope *E*, *G* şi ν se stabileşte relaţia

$$E = 2(1+\nu)G\,. \tag{4.10}$$

Cu ajutorul ei se poate calcula, de exemplu *G*, pe baza valorilor măsurate ale modulului de elasticitate longitudinal *E* şi coeficientului lui Poisson ν .

4.3 Tensiuni şi deformaţii specifice reale

Datele primare obţinute prin încercarea la tracţiune sunt alungiri ΔL măsurate la diferite valori *F* ale forţei de întindere aplicate epruvetei. În aplicaţii cu solicitări în domeniul elasto-plastic este util să se lucreze cu tensiuni reale şi alungiri specifice reale, în locul celor convenţionale. Acestea se obţin împărţind forţa de întindere la aria instantanee a suprafeţei transversale şi alungirea - la lungimea instantanee între repere.

4.3.1 Tensiunea reală

Tensiunea relă este definită de relaţia

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{A} \tag{4.11}$$

unde *A* este aria instantanee a secţiunii transversale a epruvetei.

Tensiunile reale $\tilde{\sigma}$ pot fi exprimate în funcţie de tensiunile convenţionale σ prin relaţia

$$\tilde{\sigma} = \sigma \frac{A_o}{A}\,. \tag{4.12}$$

Rezultă că la încercarea de întindere, după apariţia gâtuirii, tensiunile reale sunt mai mari decât cele convenţionale. La un material ductil, înaintea ruperii, tensiunile reale pot fi de două ori sau chiar mult mai mari decât cele convenţionale.

4.3.2 Alungirea specifică reală

Dacă, la diferite momente în timpul încercării la tracţiune, lungimea între repere este L_1, L_2, L_3 etc., iar alungirile instantanee corespunzătoare sunt $\Delta L_1, \Delta L_2, \Delta L_3$ etc., atunci alungirea specifică totală este

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\Delta L_1}{L_1} + \frac{\Delta L_2}{L_2} + \frac{\Delta L_3}{L_3} + ... = \sum_i \frac{\Delta L_i}{L_i} \qquad (4.13)$$

iar $\Delta L = \sum \Delta L_i$.

La limită, dacă alungirea ΔL este măsurată în creşteri infinitezimale, suma (4.13) este echivalentă cu o integrală. Alungirea specifică reală este

$$\tilde{\varepsilon} = \int_{L_o}^{L} \frac{\mathrm{d}L}{L} = \ln \frac{L}{L_o}, \qquad (4.14)$$

unde $L = L_o + \Delta L$ este lungimea instantanee între repere a epruvetei.

Între alungirile specifice reale şi cele convenționale se stabileşte relația

$$\tilde{\varepsilon} = \ln (1 + \varepsilon) \qquad (4.15)$$

valabilă numai până la apariția gâtuirii, când deformațiile specifice sunt constante pe toată lungimea între repere a epruvetei.

Alungirile specifice reale sunt ceva mai mici decât alungirile specifice convenționale corespunzătoare. Diferența devine importantă la o deformație specifică convențională de 10% pentru care $\tilde{\varepsilon} = \ln (1 + 0{,}1) = 0{,}0953$.

4.3.3 Ipoteza constanței volumului

Deoarece volumul metalelor se modifică puțin (sub 1/1000) la deformații plastice mari, se poate considera că în acest caz volumul epruvetei rămâne constant, deci $A_o\, L_o = A\, L = \text{const.}$, sau $\frac{A_o}{A} = \frac{L}{L_o}$.

Rezultă

$$\tilde{\varepsilon} = \ln \frac{L}{L_o} = \ln \frac{A_o}{A} \qquad (4.16)$$

şi

$$\tilde{\sigma} = \sigma (1 + \varepsilon) \qquad (4.17)$$

sau

$$\tilde{\sigma} = F\left(\frac{L}{L_o\, A_o} \right), \qquad (4.17, a)$$

relații valabile numai până la apariția gâtuirii şi numai dacă deformațiile elastice sunt neglijabile față de cele plastice.

4.3.4 Curba caracteristică reală

Alungirea specifică reală totală poate fi scrisă ca suma a două componente, una liniar-elastică, cealaltă neliniară plastică

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_e + \tilde{\varepsilon}_p \,. \tag{4.18}$$

Pentru multe metale, dacă se reprezintă în coordonate logaritmice tensiunea reală $\tilde{\sigma}$ în funcție de alungirea specifică reală plastică $\tilde{\varepsilon}_p$, rezultă o linie dreaptă, deci se poate admite o relație de forma

$$\tilde{\sigma} = K\left(\tilde{\varepsilon}_p\right)^n, \tag{4.19}$$

sau

$$\tilde{\varepsilon}_p = \left(\frac{\tilde{\sigma}}{K}\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{4.19, a}$$

atribuită lui Hollomon (1945).

În relația (4.19), K este *coeficientul de rezistență* iar n este *coeficientul de ecruisare* la tracțiune (conform *SR ISO* 10275 pentru table şi benzi metalice). De notat că exponentul n este diferit de cel din formula (4.5).

Un oțel cu $\sigma_r = 440$ MPa şi $\sigma_c = 260$ MPa are $K = 737$ MPa şi $n = 0{,}19$. În general $n = 0{,}...{,}0{,}5$. Valori ale lui n sub 0,1 sunt considerate mici, iar valori peste 0,2 sunt considerate mari.

Din (4.18) rezultă alungirea specifică reală totală

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\tilde{\sigma}}{E} + \left(\frac{\tilde{\sigma}}{K}\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{4.20}$$

relație care permite o descriere analitică a *curbei caracteristice reale* (fig. 4.8). O relație asemănătoare este utilizată în cazul încărcărilor ciclice ale materialelor.

De notat că în relația (4.20) s-a utilizat modulul de elasticitate longitudinal E calculat ca panta în origine a curbei caracteristice convenționale. Se poate arăta că modulul de elasticitate real, calculat din relația $\tilde{E} = \tilde{\sigma}/\tilde{\varepsilon}$, diferă nesemnificativ de modulul $E = \sigma/\varepsilon$ calculat pe baza curbei convenționale, mai uşor de măsurat.

La alungiri specifice mari, în secțiunea gâtuită apare o stare de tensiuni triaxială. Datorită coexistenței unor tensiuni circumferențiale, tensiunile axiale sunt

mai mari, fapt de care se ține cont prin factorul de corecție B introdus de Bridgman (1944). Tensiunea reală se calculează din relația

$$\tilde{\sigma}_B = B\,\tilde{\sigma} \tag{4.21}$$

unde, pentru $0{,}15 \le \tilde{\varepsilon} \le 3$, factorul lui Bridgman este

$$B = 0{,}83 - 0{,}186 \log \tilde{\varepsilon}\ . \tag{4.22}$$

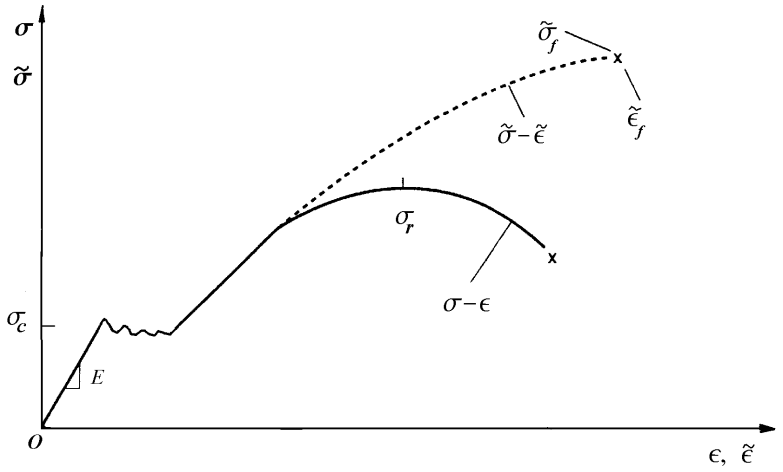


Fig. 4.8

Coordonatele punctului de rupere de pe curba caracteristică reală (fig. 4.8) sunt $\tilde{\sigma}_f$ - *rezistența la rupere reală* şi $\tilde{\varepsilon}_f$ - *alungirea specifică la rupere reală,* o măsură a ductilității materialului În general, $\tilde{\varepsilon}_f = 0,...,2$.

4.4 Încercări la compresiune şi la forfecare

Încercarea la compresiune se face în primul rând pentru materiale a căror comportare la compresiune diferă de cea la întindere şi uneori la materiale utilizate să preia solicitări de compresiune. Epruvetele sunt în general cilindrice, cu raportul lungime/diametru = 1 până la 3.

Materialele fragile, cum sunt fonta, betonul, piatra de construcție şi unele materiale ceramice, sunt încercate până la rupere. Ruperea la compresiune este în general produsă de tensiunile tangențiale, astfel că suprafețele de rupere sunt înclinate față de axa epruvetei. Materialele tenace nu se rup la compresiune. Curba

carcteristică la compresiune a metalelor ductile prezintă o porțiune inițială identică cu cea a curbei caracteristice la tracțiune, încercarea făcându-se până la curgere.

În general, prin încercarea la compresiune a oțelurilor (conform STAS 1552-78) se obțin aceleaşi valori pentru $\sigma_p, \sigma_e, \sigma_c$ şi E ca la încercarea la întindere. Totuşi, dacă o bară de oțel ecruisată prin întindere este încercată ulterior la compresiune, se constată că limita de curgere la compresiune este inferioară celei determinate prin încercarea de întindere, fenomen cunoscut sub denumirea de "efect Bauschinger".

Relația între tensiunile tangențiale τ şi lunecările specifice γ se poate stabili prin încercarea de rezistență la forfecare pură (conform STAS 7926-67).

În domeniul liniar, aceasta are forma legii lui Hooke (3.23)

$$\tau = G\,\gamma \tag{4.23}$$

unde G este *modulul de elasticitate transversal* al materialului.

Se utilizează aşa-numita *epruvetă Iosipescu,* cu două crestături unghiulare transversale, cu fețele formând unghiuri de 90^o şi de adâncime egală cu 1/4 din înălțime (Fig. 4.9). Aceasta asigură aplicarea unei solicitări de forfecare pură, cu o distribuție practic uniformă a tensiunilor tangențiale pe toată înălțimea secțiunii.

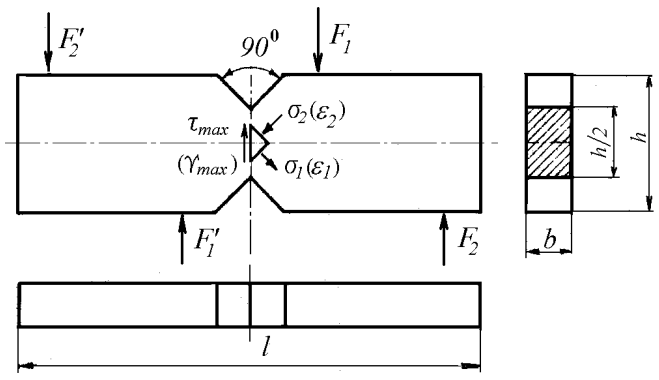


Fig. 4.9

Măsurarea lunecărilor specifice γ, produse sub acțiunea tensiunilor tangențiale din secțiunea de forfecare pură în domeniul elastic, se realizează prin măsurarea alungirilor specifice ε_1 şi ε_2 din direcțiile principale (v. Cap. 9) înclinate la 45^0 $(\gamma_{max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2)$. Pentru determinarea alungirilor specifice se utilizează tensometria electrică rezistivă.

Epruveta este solicitată la încovoiere (Fig. 4.10), cu variație liniară a momentului încovoietor şi cu moment nul în secțiunea în care se produce ruperea prin solicitare la forfecare pură.

Prin *forfecare pură* se înțelege solicitarea produsă numai de tensiuni tangențiale paralele cu o singură direcție din planul unei secțiuni transversale a unei piese, fără ca pe acea secțiune să acționeze tensiuni normale (v. Cap.9).

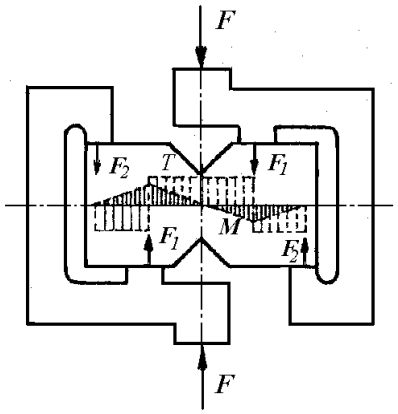


Fig. 4.10

Se trasează o diagramă a încercării la forfecare, a cărei pantă în origine este modulul de elasticitate transversal *G*.

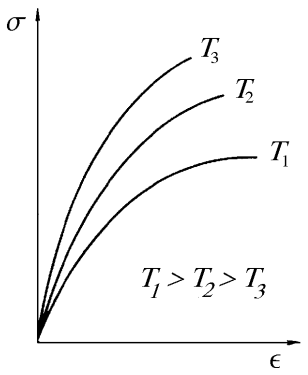


Fig. 4.11

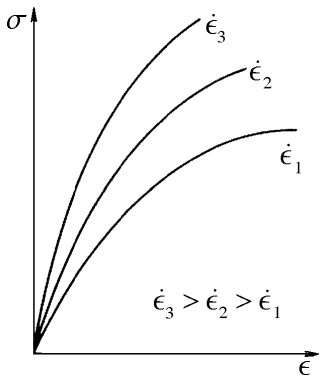


Fig. 4.12

4.5 Efectul temperaturii şi vitezei de deformare

În general, odată cu creşterea temperaturii, curba caracteristică a unui metal este mai înclinată (deci modulul de elasticitate scade) şi ajunge la tensiuni mai mici (deci limita de curgere scade) (fig. 4.11).

Creşterea vitezei de deformare $\dot{\varepsilon} = \mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}t$ duce la o creştere aparentă a modulului de elasticitate şi a limitei de curgere convenționale (fig. 4.12) la multe materiale.

4.6 Rezistențe admisibile

În rezolvarea problemelor de Rezistența materialelor, după modelarea piesei sau a sistemului real şi determinarea caracteristicilor mecanice ale materialului utilizat, se pune problema precizării valorii maxime admisibile a tensiunilor din piesa studiată, denumită *rezistență admisibilă*.

Rezistența admisibilă este valoarea convențională aleasă în calcule, pe baza experienței practice, pentru tensiunea maximă care se poate produce într-o piesă, în condiții date de material, de solicitare şi de mediu ambiant.

Însă aceste condiții, în general, nu sunt cunoscute perfect. Determinarea sarcinilor este aproximativă, fiind posibilă depăşirea valorilor considerate în calcule. Există incertitudini privind condițiile de mediu ambiant, în special temperatura. Caracteristicile mecanice ale materialelor pot varia față de valorile cunoscute, iar schema de calcul poate duce la o subapreciere a nivelului real de solicitare a piesei. Aceasta impune o anumită precauție în alegerea rezistențelor admisibile, pentru a avea siguranța că, în condițiile cele mai dezavantajoase de lucru, piesa îndeplineşte funcțiile pentru care a fost proiectată: nu se rupe, nu are deformații remanente mari, este suficient de rigidă şi nu-şi pierde stabilitatea formei de echilibru.

Considerând că la materialele tenace *curgerea* reprezintă o stare limită care nu trebuie atinsă, iar la materialele fragile - *ruperea*, se aleg *coeficienții de siguranță* supraunitari la care se împarte limita de curgere σ_c, respectiv rezistența la rupere σ_r, pentru a se calcula *rezistența admisibilă* σ_a.

Rezistențele admisibile se definesc prin relațiile

$$\sigma_a = \frac{\sigma_c}{c_c}, \qquad \sigma_a = \frac{\sigma_r}{c_r}, \tag{4.24}$$

unde c_c este coeficientul de siguranță față de curgere, iar c_r - coeficientul de siguranță față de rupere.

Cu cât ipotezele de calcul sunt mai apropiate de realitate, sarcinile sunt evaluate mai corect, iar proprietățile materialelor sunt cunoscute mai bine, cu atât coeficienții de siguranță se pot alege mai mici, şi - corespunzător - rezistențele admisibile se pot alege mai mari.

În domeniul construcțiilor metalice, unde se utilizează frecvent bare din oțeluri tenace, starea limită este considerată curgerea, iar rezistențele admisibile se stabilesc funcție de limita de curgere σ_c . Deobicei $\sigma_c = 250$ MPa, dar se utilizează şi laminate cu $\sigma_c = 345$ MPa. Normele *AISC ASD* [37] recomandă următoarele valori ale rezistențelor admisibile, în special pentru profile corniere:

a) la întindere $\sigma_{at} \le 0{,}6\,\sigma_c$;

b) la forfecare $\tau_{af} = 0{,}4\,\sigma_c$;

c) la încovoiere $\sigma_{ai} = 0{,}66\,\sigma_c$

Stabilirea valorilor rezistențelor admisibile face obiectul cursului de Organe de maşini. În problemele de Rezistența materialelor, valorile rezistențelor admisibile sunt date fără comentarii. Valori orientative sunt prezentate în *Anexa 1*.

Metoda de calcul pe baza rezistențelor admisibile este larg utilizată în construcția de maşini, unde apar frecvent probleme dinamice şi unde modelarea piesei reale este mai dificilă. La calculul construcțiilor este mai larg răspândită *metoda capacității portante* (metoda sarcinilor limită), bazată pe valori maxime admisibile ale sarcinilor exterioare aplicate structurilor.

5.
ÎNTINDEREA ŞI COMPRESIUNEA BARELOR

O bară dreaptă este solicitată la întindere (compresiune) dacă în secțiunea transversală acționează o forță axială. Atunci când în lungul barei sunt aplicate mai multe forțe, este necesară construcția diagramei forțelor axiale.

Problemele de întindere pot fi *static nedeterminate*, atunci când reacțiunile şi eforturile din bare nu pot fi determinate numai din condiții de echilibru. Ele apar la sisteme cu interacțiuni între componente cu rigidități diferite, la grinzi cu zăbrele şi poduri suspendate pe cabluri, la probleme cu dilatări împiedicate sau cu constrângeri de deplasări.

În general, pentru rezolvarea problemelor static nedeterminate este necesară utilizarea a patru tipuri de relații: 1) *ecuații de echilibru*; 2) *ecuații* care descriu geometria *deformațiilor* sau compatibilitatea între deformații specifice şi deplasări; 3) *ecuații constitutive* între tensiuni şi deformații specifice sau între forțe şi deplasări; şi 4) *condiții la limită*, de rezemare sau de solicitare pe contur. În continuare se va ilustra aplicarea acestor ecuații la probleme de întindere.

5.1 Tensiuni şi deformații la întindere

Fie bara din figura 5.1, solicitată de forța F. În secțiunea x, forța axială $N = F$. Se observă că după aplicarea forței F, secțiunea BC are o deplasare axială Δx , dar rămâne plană şi perpendiculară pe axa barei, deci ipoteza lui Bernoulli este valabilă.

Rezultă că alungirea specifică este aceeaşi în toate punctele secțiunii transversale:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x} = \text{const.},$$

şi, conform legii lui Hooke

$$\sigma = E\,\varepsilon = \text{const.},$$

deci tensiunile normale produse de întindere sunt uniform distribuite pe secţiunea transversală a barei.

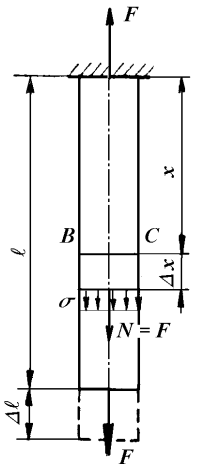


Fig. 5.1

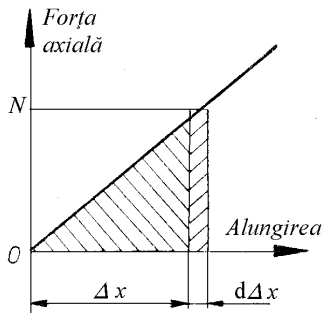


Fig. 5.2

Rezultanta forţelor elementare $\sigma\,\mathrm{d}A$ de pe toate elementele infinitezimale $\mathrm{d}A$ ale secţiunii este forţa axială N:

$$N = \int_A \sigma\,\mathrm{d}A = \sigma \int_A \mathrm{d}A = \sigma\, A\,,$$

deci formula tensiunilor normale de întindere sau compresiune este

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A}} \qquad (5.1)$$

Alungirea porţiunii de bară de lungime x este:

$$\Delta x = \varepsilon\, x = \frac{\sigma}{E}\, x = \frac{N\, x}{E\, A}\,,$$

care, pentru o bară de lungime ℓ, se scrie:

$$\Delta\ell = \int_\ell \frac{N\,\mathrm{d}x}{E\, A} \qquad (5.2)$$

unde produsul $E\,A$ se numeşte *modùl de rigiditate la întindere*.

Pentru tronsoane de bară la care $N = \text{const.}$ şi $E\,A = const.$, alungirea este

$$\boxed{\Delta\ell = \frac{N\,\ell}{E\, A}} \qquad (5.3)$$

Relația (5.1) este utilizată sub următoarele forme:

- formula de dimensionare:

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a}; \qquad (5.4, a)$$

- formula de verificare:

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A} \le \sigma_a; \qquad (5.4, b)$$

- formula forței capabile:

$$N_{cap} = A\,\sigma_a\,. \qquad (5.4, c)$$

În relațiile (5.4), σ_a este rezistența admisibilă la întindere sau la compresiune.

5.2 Energia de deformație la întindere

Alungirea unei porțiuni de bară de lungime x este $\Delta x = \frac{N\,x}{E\,A}$, deci lucrul mecanic produs de forța axială N pe deplasarea elementară $\mathrm{d}(\Delta x)$ este

$$N\,\mathrm{d}(\Delta x) = \frac{E\,A}{x}\,\Delta x\,\mathrm{d}(\Delta x).$$

Dacă solicitarea este statică, lucrul mecanic efectuat de sarcinile exterioare se transformă în energie potențială de deformație:

$$U = \int_0^{\Delta x} \frac{E\,A}{x}\,\Delta x\,\mathrm{d}(\Delta x) = \frac{E\,A}{x}\,\frac{(\Delta x)^2}{2} = \frac{1}{2}\,N\,\Delta x = \frac{N^2\,x}{2\,E\,A}.$$

Aceasta este egală cu aria supafeței de sub diagrama forță-alungire (fig. 5.2).

Pentru un element de bară de lungime $\mathrm{d}x$, energia de deformație este $\mathrm{d}U = \frac{N^2\,\mathrm{d}x}{2\,E\,A}$, deci energia înmagazinată de întreaga bară se poate scrie:

$$U = \int_{\ell} \frac{N^2\,\mathrm{d}x}{2\,E\,A}. \qquad (5.5)$$

Pe baza relației (5.1), notând $\mathrm{d}V = A\,\mathrm{d}x$, se mai obține

$$U = \int_V \frac{\sigma^2}{2E}\,\mathrm{d}V. \qquad (5.5, a)$$

unde $U_0 = \dfrac{\sigma^2}{2E}$ este *energia de deformaţie specifică* (în unitatea de volum).

5.3 Sisteme static nedeterminate

La sisteme static nedeterminate (sisteme hiperstatice), reacţiunile şi eforturile din bare nu pot fi determinate numai cu ajutorul ecuaţiilor de echilibru din statică. Pentru rezolvarea problemelor static nedeterminate este necesar să se stabilească patru tipuri de ecuaţii: de echilibru, de compatibilitate geometrică, relaţii forţă-deformaţii şi condiţii la limită.

5.3.1 Compatibilitatea între deplasări şi deformaţii

Se consideră o bară *i-j* articulată la capete (fig. 5.3), deci solicitată axial, element component al unei structuri deformabile (de ex.: grindă cu zăbrele). Bara face iniţial unghiul α cu axa *X* a sistemului de referinţă *XOY*. Ca urmare a deformării structurii sub acţiunea sarcinilor exterioare, bara se deformează, iar capetele *i* şi *j* se deplasează în *i'* şi *j'*.

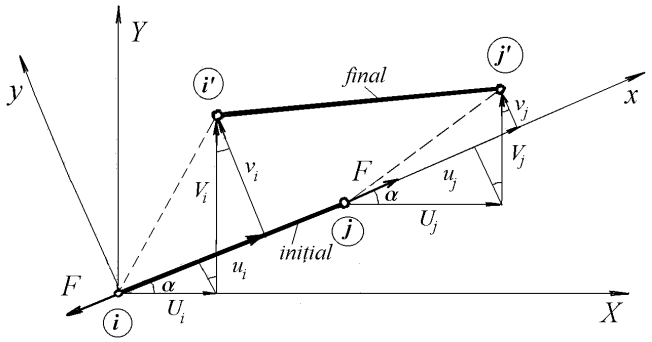


Fig. 5.3

Se notează U_i, V_i şi U_j, V_j componentele deplasărilor capetelor barei pe axele *X*, *Y*, respectiv u_i, v_i şi u_j, v_j componentele deplasărilor capetelor pe axele *x*, *y*. Între alungirea barei $\Delta\ell_{ij}$ şi deplasările capetelor barei u_i, u_j se stabileşte condiţia de compatibilitate în sistemul local de coordonate *xOy*:

$$\Delta\ell_{ij} = u_j - u_i \,. \tag{5.6}$$

În general, este convenabil să se lucreze cu componentele deplasărilor în sistemul global de coordonate *XOY*. Deoarece

$$\begin{aligned} u_i &= U_i \cos\alpha + V_i \sin\alpha , \\ u_j &= U_j \cos\alpha + V_j \sin\alpha , \end{aligned} \tag{5.7}$$

condiția de compatibilitate geometrică (5.6) devine

$$\Delta\ell_{ij} = \left(U_j - U_i\right)\cos\alpha + \left(V_j - V_i\right)\sin\alpha . \tag{5.8}$$

Relația (5.8) va fi utilizată în rezolvarea problemelor static nedeterminate prin metoda deplasărilor.

5.3.2 Sisteme cu restrângeri de deplasări

Barele drepte cu articulații fixe la capete, solicitate axial şi barele cu dilatări împiedicate sunt sisteme static nedeterminate

5.3.2.1 Bara cu articulații fixe la capete

Fie bara din figura 5.4, cu articulații fixe la capete, solicitată de forța *F* aplicată în secțiunea *3*. Se cer tensiunile din bară.

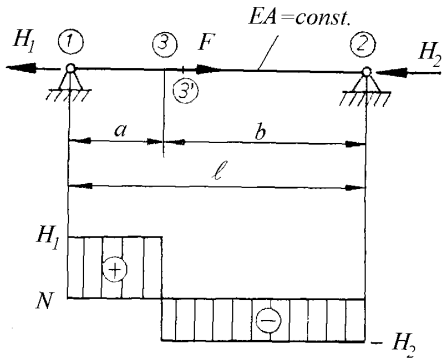


Fig. 5.4

Reacțiunile din articulații sunt H_1 şi H_2.

Ecuația de echilibru. Ecuația de proiecții pe orizontală a forțelor se scrie

$$H_1 - F + H_2 = 0 . \tag{5.9}$$

Compatibilitatea deformațiilor. În urma aplicării forței *F*, secțiunea *3* se deplasează în *3*', deci "cât se întinde porțiunea *1-3* atât se comprimă porțiunea *3-2"*

$$\Delta\ell_{13} = \left|\Delta\ell_{32}\right| . \tag{5.10}$$

Relaţiile forţă-deformaţie. Pe baza legii lui Hooke s-a stabilit expresia (5.3) a alungirilor care, pentru cele două porţiuni de bară, se scrie

$$\Delta\ell_{13} = \frac{N_{13}\, a}{E\, A}, \quad \Delta\ell_{32} = \frac{N_{32}\, b}{E\, A} \quad . \tag{5.11}$$

Din diagrama forţelor axiale rezultă

$$N_{13} = H_1 , \qquad N_{32} = H_1 - F = -H_2 . \tag{5.12}$$

Din relaţiile (5.10)-(5.12) se obţin valorile reacţiunilor

$$H_1 = F\frac{b}{\ell}, \qquad H_2 = F\frac{a}{\ell}, \tag{5.13}$$

deci tensiunile din bară au expresiile

$$\sigma_{13} = \frac{N_{13}}{A} = \frac{F\, b}{A\, \ell}, \qquad \sigma_{32} = \frac{N_{32}}{A} = -\frac{F\, a}{A\, \ell} . \tag{5.14}$$

Tensiunile pozitive sunt de întindere iar cele negative sunt de compresiune.

5.3.2.2 Tensiuni termice

Într-o bară de secţiune constantă, articulată sau încastrată la capete (fig. 5.5, a), încălzită uniform (pentru evitarea încovoierii) cu Δt (grade), apar tensiuni de compresiune datorită împiedicării dilatării.

Dacă bara ar fi liberă la capete, datorită încălzirii s-ar dilata liber, alungindu-se cu

$$\Delta\ell = \ell\, \alpha\, \Delta t , \tag{5.15}$$

unde α este coeficientul de dilatare termică liniară al materialului barei.

Împiedicarea dilatării este echivalentă cu aplicarea unei forţe de compresiune *N*, care readuce bara la lungimea iniţială, deci o comprimă cu

$$\Delta\ell = -\frac{N\, \ell}{E\, A} . \tag{5.16}$$

Egalând expresiile (5.15) şi (5.16) rezultă

$$\ell\, \alpha\, \Delta t = -\frac{N\, \ell}{E\, A} ,$$

de unde se obţine formula tensiunilor termice produse de dilatarea împiedicată

$$\sigma = \frac{N}{A} = -E\,\alpha\,\Delta t \qquad (5.17)$$

care în acest caz nu depind de aria suprafeței secțiunii transversale.

La bara cu secțiunea variabilă în trepte din figura 5.6, încălzită uniform cu diferența de temperatură Δt, un raționament analog conduce la condiția

$$(\ell_1 + \ell_2)\alpha\,\Delta t = -\frac{N\,\ell_1}{E\,A_1} - \frac{N\,\ell_2}{E\,A_2},$$

deci tensiunile termice sunt

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_1} = -\frac{\ell_1 + \ell_2}{\ell_1 + \frac{A_1}{A_2}\ell_2} E\,\alpha\,\Delta t\,; \qquad \sigma_2 = \frac{N}{A_2} = -\frac{\ell_1 + \ell_2}{\ell_2 + \frac{A_2}{A_1}\ell_1} E\,\alpha\,\Delta t\,.$$

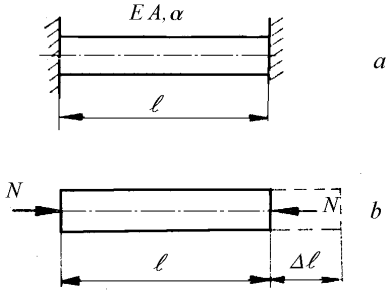


Fig. 5.5

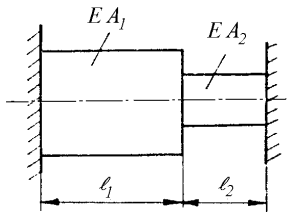


Fig. 5.6

5.3.3 Interacțiunea între componente cu rigidități diferite

În continuare se vor da exemple de probleme static nedeterminate pentru sisteme cu elemente componente de rigidități diferite. Primele două probleme vor fi rezolvate prin *metoda forțelor*, în care necunoscutele sunt reacțiuni sau forțe în bare. Următoarele două probleme se vor rezolva prin *metoda deplasărilor*, în care necunoscutele primare sunt deplasări, forțele din bare şi tensiunile fiind calculate ulterior.

5.3.3.1 Bara cu secțiune eterogenă

Se cer tensiunile produse de forța F în bara din figura 5.7, compusă din două materiale diferite (ex.: stâlp din beton armat, cablu de aluminiu cu inimă de oțel etc.), desenate separat pentru simplificarea expunerii. Se cunosc modulele de rigiditate la întindere $E_1 A_1$ şi $E_2 A_2$.

Rezolvare

Ecuaţia de echilibru. Forţa exterioară F este preluată în proporţii diferite de cele două materiale. Suma forţelor axiale N_1 şi N_2 egalează forţa totală:

$$N_1 + N_2 = F\,. \tag{5.18}$$

Compatibilitatea deformaţiilor. Cele două materiale, cu aceeaşi lungime iniţială ℓ, au deformaţii identice, fiind solidarizate între ele:

$$\Delta\ell_1 = \Delta\ell_2\,. \tag{5.19}$$

Relaţiile forţă-deformaţie. Pe baza legii lui Hooke, s-a stabilit expresia (5.3) a alungirilor, care pentru cele două materiale se scrie

$$\Delta\ell_1 = \frac{N_1\,\ell}{E_1 A_1}, \qquad \Delta\ell_2 = \frac{N_2\,\ell}{E_2 A_2}\,. \tag{5.20}$$

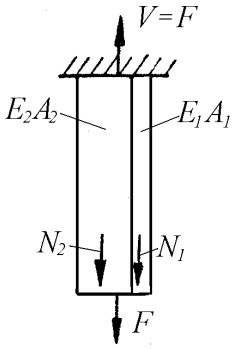


Fig. 5.7

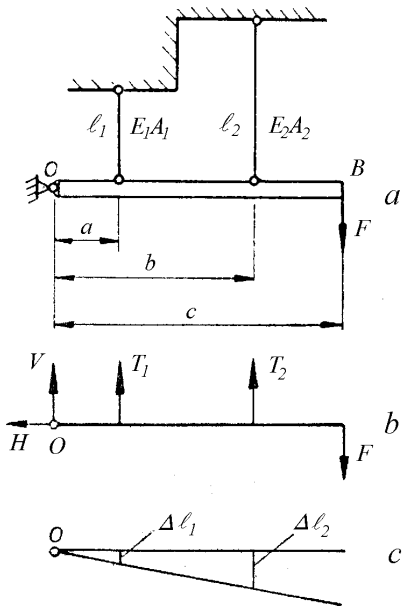


Fig. 5.8

Înlocuind relaţiile (5.20) în (5.19) şi utilizând ecuaţia (5.18) se obţine

$$\frac{N_1\,\ell}{E_1 A_1} = \frac{N_2\,\ell}{E_2 A_2} = \frac{N_1 + N_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} = \frac{F}{E_1 A_1 + E_2 A_2}\,.$$

Rezultă tensiunile în cele două materiale

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{F}{A_1 + \dfrac{E_2}{E_1} A_2}\,;\ \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{F}{A_2 + \dfrac{E_1}{E_2} A_1}\,. \tag{5.21}$$

Dacă se cunosc rezistenţele admisibile la întindere ale celor două materiale σ_{a1}, σ_{a2} şi se cere forţa capabilă de întindere, se calculează

$$F' = \sigma_{a_1}\left(A_1 + \frac{E_2}{E_1} A_2\right);\ \ F'' = \sigma_{a_2}\left(A_2 + \frac{E_1}{E_2} A_1\right)$$

şi se alege F_{cap} egală cu cea mai mică dintre cele două valori F' şi F''.

5.3.3.2 Sistem de bare paralele

Se consideră o bară rigidă *OB* (fig. 5.8, *a*) suspendată de două bare elastice (tiranţi) şi articulată în *O*. Se cer tensiunile în barele verticale articulate la capete.

Ecuaţia de echilibru. Izolând bara rigidă şi evidenţiind forţele care acţionează asupra ei (fig. 5.8, *b*), se scrie ecuaţia de momente faţă de punctul *O* :

$$T_1\, a + T_2\, b = F\, c\,. \tag{5.22}$$

Compatibilitatea deformaţiilor. Ecuaţia deformaţiilor se scrie pe baza condiţiei ca, după aplicarea forţei *F,* bara rigidă *OB* să rămână rectilinie (fig. 5.8, *c*) când barele verticale se alungesc:

$$\frac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2} = \frac{a}{b}\,. \tag{5.23}$$

Relaţiile forţă-deformaţie. Pentru cele două bare verticale, ecuaţia (5.3) se scrie

$$\Delta\ell_1 = \frac{T_1\,\ell_1}{E_1 A_1}\ ,\quad \Delta\ell_2 = \frac{T_2\,\ell_2}{E_2 A_2}\,. \tag{5.24}$$

Înlocuind relaţiile (5.24) în (5.23) şi utilizând ecuaţia (5.22) se obţin întâi forţele T_1 şi T_2, apoi se calculează tensiunile în bare:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{T_1}{A_1} = \frac{F}{\dfrac{b^2}{a\,c}\dfrac{\ell_1}{\ell_2}\dfrac{E_2}{E_1} A_2 + \dfrac{a}{c} A_1}\,;\\
\sigma_2 &= \frac{T_2}{A_2} = \frac{F}{\dfrac{a^2}{b\,c}\dfrac{\ell_2}{\ell_1}\dfrac{E_1}{E_2} A_1 + \dfrac{b}{c} A_2}\,.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

5.3.3.3 Sistem de bare concurente

La sistemul din figura 5.9, compus din trei bare concurente articulate la capete, se cer forţele din bare şi deplasarea punctului de aplicare a forţei *F*.

Pentru simplificarea rezolvării, se descompune forţa *F* în două componente, una orizontală, $F_1 = F\sin\alpha$ şi şi una verticală, $F_2 = F\cos\alpha$. Se consideră că deplasarea oblică δ a punctului *4* are componentele δ_1 şi δ_2 pe direcţiile forţelor cu acelaşi indice.

Ecuaţiile de echilibru. Se scriu ecuaţiile de proiecţii ale forţelor care acţionează asupra articulaţiei *4* :

$$\begin{aligned} &T_1\sin\theta - T_3\sin\theta = F_1\,,\\ &T_1\cos\theta + T_2 + T_3\cos\theta = F_2\,. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Ecuaţiile de compatibilitate geometrică. Pentru cele trei bare, ţinând cont de *condiţiile la limită* în punctele fixe *1*, *2* şi *3*, relaţiile între deformaţii şi deplasări (5.8) se scriu sub forma

$$\begin{aligned} &\Delta\ell_{14} = \delta_1\sin\theta + \delta_2\cos\theta\,,\\ &\Delta\ell_{24} = \delta_2\,,\\ &\Delta\ell_{34} = -\delta_1\sin\theta + \delta_2\cos\theta\,. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Relaţiile forţă-deformaţie. Pentru cele trei bare, ecuaţia (5.3) se scrie

$$\Delta\ell_{14} = \frac{T_1\,\ell}{E\,A}\,,\quad \Delta\ell_{24} = \frac{T_2\,\ell\cos\theta}{E\,A}\,,\qquad \Delta\ell_{34} = \frac{T_3\,\ell}{E\,A}\,. \tag{5.28}$$

Înlocuind relaţiile (5.28) în (5.27), se obţin relaţiile între eforturi şi deplasări

$$\begin{aligned} &T_1 = \frac{E\,A}{\ell}\left(\delta_1\sin\theta + \delta_2\cos\theta\right),\\ &T_2 = \frac{E\,A}{\ell\cos\theta}\,\delta_2\,,\\ &T_3 = \frac{E\,A}{\ell}\left(-\delta_1\sin\theta + \delta_2\cos\theta\right), \end{aligned} \tag{5.29}$$

care, înlocuite în (5.26), permit calculul componentelor deplasării punctului *4* din relaţiile

$$\begin{aligned} &\frac{2\,E\,A}{\ell}\sin^2\theta\cdot\delta_1 = F_1\,,\\ &\frac{E\,A}{\ell}\left(2\cos^2\theta + \frac{1}{\cos\theta}\right)\delta_2 = F_2\,. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Înlocuind componentele deplasării din relaţiile (5.30) în ecuaţiile (5.29) se obţin forţele din bare, apoi, prin împărţire la aria secţiunii tranversale, tensiunile.

Se observă că deplasarea δ a punctului de aplicare al forţei F nu are loc pe direcţia forţei, deoarece forţa F nu este aplicată în lungul unei direcţii principale de rigiditate a sistemului.

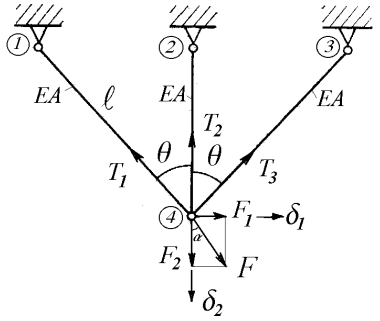


Fig. 5.9

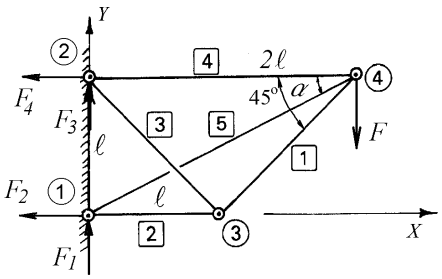
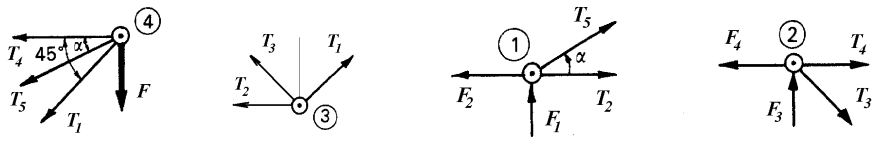


Fig. 5.10

5.3.3.4 Sistem de bare articulate la capete

Grinda cu zăbrele din figura 5.10 are articulaţii fixe în punctele *1* şi *2*. Se cer eforturile axiale din bare şi deplasarea punctului de aplicaţie a forţei. Barele au acelaşi modul de rigiditate la întindere $E\,A$.

Din geometria figurii rezultă $\sin\alpha = 1/\sqrt{5}$ şi $\cos\alpha = 2/\sqrt{5}$. Se notează $F_1,...,F_4$ componentele reacţiunilor din articulaţiile fixe şi $T_1,...,T_5$ forţele din bare.



a b c d

Fig. 5.11

Ecuaţiile de echilibru. Se izolează fiecare articulaţie şi se scriu ecuaţiile de proiecţii ale forţelor care acţionează asupra "nodului" respectiv.

Pentru nodul *4* (fig. 5.11, *a*) se obţine

$$\begin{aligned} &T_4 + T_5\,2/\sqrt{5} + T_1/\sqrt{2} = 0, \\ &F + T_1/\sqrt{2} + T_5/\sqrt{5} = 0. \end{aligned} \qquad (5.31)$$

Pentru nodul *3* (fig. 5.11, *b*)

$$\begin{aligned} &T_2 + T_3/\sqrt{2} - T_1/\sqrt{2} = 0, \\ &T_1/\sqrt{2} + T_3/\sqrt{2} = 0. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Pentru nodul *1* (fig. 5.11, *c*)

$$\begin{aligned} &T_2 + T_5\, 2/\sqrt{5} - F_2 = 0, \\ &T_5/\sqrt{5} + F_1 = 0. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Pentru nodul *2* (fig. 5.11, *d*)

$$\begin{aligned} &T_4 + T_3/\sqrt{2} - F_4 = 0, \\ &F_3 - T_3/\sqrt{2} = 0. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Cele 8 ecuaţii de echilibru (5.31)-(5.34) conţin 9 necunoscute. Sistemul este static nedeterminat. Rezolvarea se va face prin metoda deplasărilor.

Ecuaţiile de compatibilitate geometrică. Pentru cele cinci bare, relaţia între deformaţii şi deplasări (5.8) se scrie sub forma

$$\Delta\ell_{34} = (U_4 - U_3)\cos 45^{\circ} + (V_4 - V_3)\sin 45^{\circ}, \tag{5.35}$$

$$\Delta\ell_{23} = (U_3 - U_2)\cos\ 135^{\circ} + (V_3 - V_2)\sin\ 135^{0}, \tag{5.36}$$

$$\Delta\ell_{14} = (U_4 - U_1)\,\frac{2}{\sqrt{5}} + (V_4 - V_1)\,\frac{1}{\sqrt{5}}, \tag{5.37}$$

$$\Delta\ell_{13} = U_3 - U_1\ , \tag{5.38}$$

$$\Delta\ell_{24} = U_4 - U_2, \tag{5.39}$$

unde $U_i, V_i\ \ (i = 1,...,4)$ sunt componentele (orizontală şi verticală ale) deplasărilor nodurilor în sistemul de coordonate globale *XOY*.

Condiţiile la limită. În articulaţiile fixe

$$U_1 = V_1 = U_2 = V_2 = 0, \tag{5.40}$$

ceea ce simplifică relaţiile (5.35)-(5.39).

Relaţiile forţă-alungire. Pentru cele cinci bare, ecuaţia (5.3) se scrie

$$\begin{aligned} &\Delta\ell_{34} = \frac{T_1\sqrt{2}\,\ell}{EA}\ , \qquad \Delta\ell_{13} = \frac{T_2\,\ell}{EA}, \quad \Delta\ell_{23} = \frac{T_3\sqrt{2}\,\ell}{EA}. \\ &\Delta\ell_{24} = \frac{T_4\,2\,\ell}{EA}, \qquad \Delta\ell_{14} = \frac{T_5\sqrt{5}\,\ell}{EA}. \end{aligned} \tag{5.41}$$

Ecuaţiile (5.31)-(5.41) formează un sistem liniar de 22 ecuaţii cu 22 necunoscute. Dacă se ţine cont de condiţiile la limită şi se elimină alungirile, rămân două grupuri decuplate de câte patru ecuaţii.

Se calculează întâi deplasările

$$U_3 = -1{,}33\,\frac{F\,\ell}{E\,A},\; V_3 = -3{,}21\,\frac{F\,\ell}{E\,A},\; U_4 = 2{,}67\,\frac{F\,\ell}{E\,A},\; V_4 = -9{,}09\,\frac{F\,\ell}{E\,A},$$

apoi reacţiunile

$$F_1 = 0{,}335\,F,\; F_2 = -2\,F,\; F_3 = 0{,}665\,F,\; F_4 = 2\,F. \qquad (5.42)$$

Înlocuind valorile reacţiunilor (5.42) în ecuaţiile de echilibru, se obţin forţele axiale din bare, egale şi de sens contrar forţelor care acţionează asupra nodurilor.

5.4 Concentrarea tensiunilor

Calculul la întindere, bazat pe relaţia (5.1), este valabil numai pentru bare de secţiune constantă, deci care respectă ipoteza constanţei secţiunii transversale.

Discontinuităţile geometrice, de exemplu, variaţii în trepte ale secţiunii transversale (reducţii), găuri transversale, crestături, şanţuri sau scobituri laterale, produc variaţii locale importante ale tensiunilor, ale căror valori maxime sunt mai mari decât tensiunea medie în secţiunea transversală netă a barei. Acest fenomen este denumit *concentrarea tensiunilor* iar discontinuitatea geometrică respectivă se numeşte *concentrator de tensiuni*.

La un concentrator de tensiuni, tensiunea maximă este funcţie de forma şi dimensiunile piesei în vecinătatea discontinuităţii.

Se defineşte *factorul teoretic de concentrare a tensiunilor elastice* K_t prin relaţia

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \qquad (5.43)$$

unde σ_{max} este tensiunea maximă la discontinuitatea geometrică şi σ_{nom} este tensiunea medie în secţiunea transversală respectivă. Acest factor este constant în domeniul comportării elastice a materialului.

În literatura tehnică (Peterson [48], Neuber [45], Frocht [24], Pilkey [52]) se dau diagrame ale factorului K_t în funcţie de dimensiunile concentratorului. Ele se bazează fie pe soluţii analitice din Teoria elasticităţii sau soluţii numerice prin Metoda elementelor finite, fie pe determinări experimentale cu ajutorul fotoelasticimetriei.

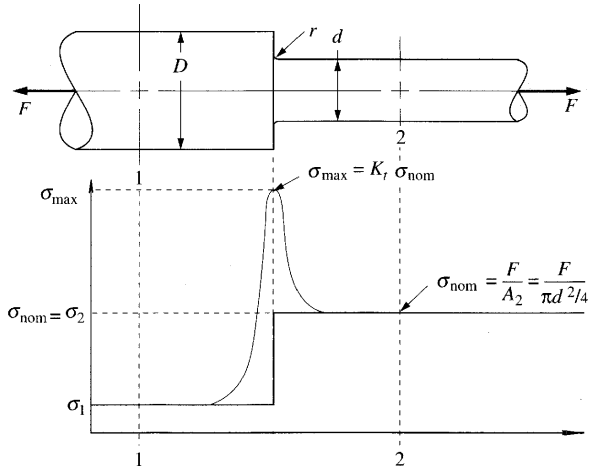


Fig. 5.12 [43]

Pentru o bară solicitată la întindere, cu secţiune variabilă în trepte, creşterea locală a tensiunilor datorită saltului de diametru este redată în figura 5.12.

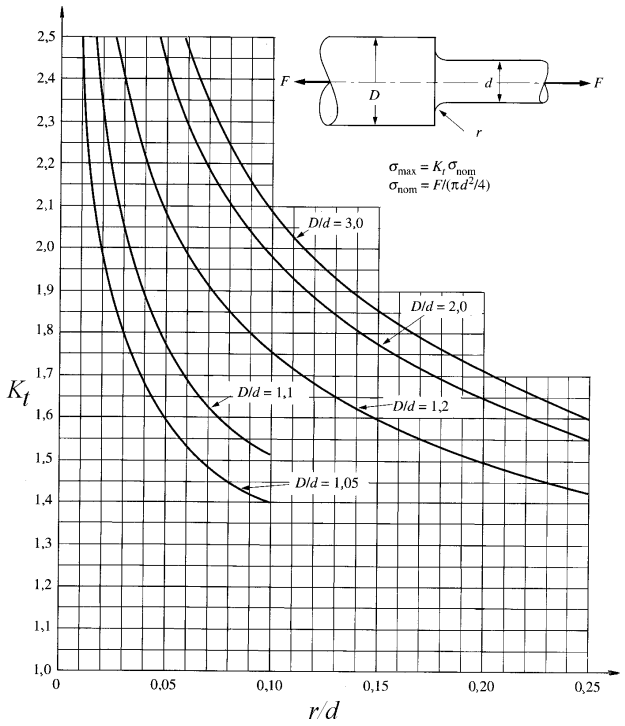
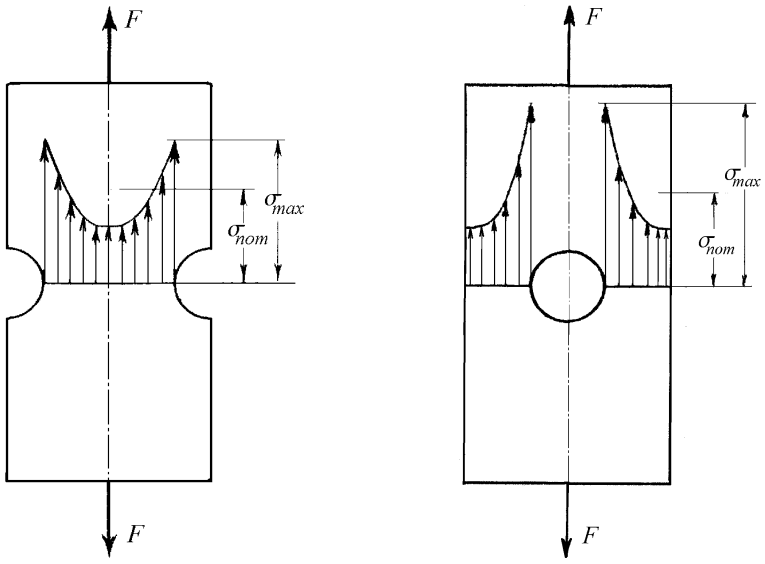


Fig. 5.13 [43]

Variația factorului teoretic de concentrare a tensiunilor K_t în funcție de raportul între raza de racordare şi diametrul mic este redată în figura 5.13, pentru cinci valori ale raportului diametrelor celor două porțiuni. Se remarcă valori $K_t = 1{,}4...2{,}5$. Raze de racordare mici produc valori K_t mari, deci trebuie evitate în proiectare.

Distribuția tensiunilor axiale pentru o bară cu degajări laterale semicirculare este ilustrată în figura 5.14, *a* iar pentru o bară cu gaură circulară transversală - în figura 5.14, *b*.



a b

Fig. 5.14

La bara cu gaură transversală (fig. 5.14, *b*), fie $\sigma_1 = \dfrac{F}{A_1}$ tensiunile normale uniform distribuite pe o secțiune de arie A_1 situată la o anumită distanță de discontinuitate. În secțiunea din dreptul găurii, de arie $A_2 < A_1$, *tensiunea nominală* este tensiunea medie $\sigma_2 = \sigma_1 \dfrac{A_1}{A_2} > \sigma_1$.

Se observă însă că în peretele găurii apar tensiuni σ_{max} mult mai mari decât tensiunea medie, $\sigma_{max} = K_t \, \sigma_{nom}$, unde $K_t = 2{,}...3$, deoarece în vecinătatea găurii starea de tensiuni nu mai este liniară. Apare un *gradient de tensiune*, o variație locală bruscă a tensiunilor, care scad de la valoarea maximă la nivelul

găurii, la o valoare inferioară tensiunii nominale, la marginea barei (ariile de sub diagramele tensiunilor sunt egale).

La verificarea unei piese, se calculează întâi $\sigma_{nom} = \frac{N}{A}$ pe baza ariei nete a barei în dreptul concentratorului, se evaluează apoi din diagrame factorul K_t pe baza elementelor geometrice ale concentratorului şi se calculează tensiunea maximă σ_{max} care în final este comparată cu rezistenţa admisibilă σ_a.

5.5 Tensiuni pe o suprafaţă înclinată faţă de axa barei

Fie o bară solicitată la întindere (fig. 5.15) secţionată cu un plan *BC* înclinat cu unghiul α faţă de secţiunea transversală *A*.

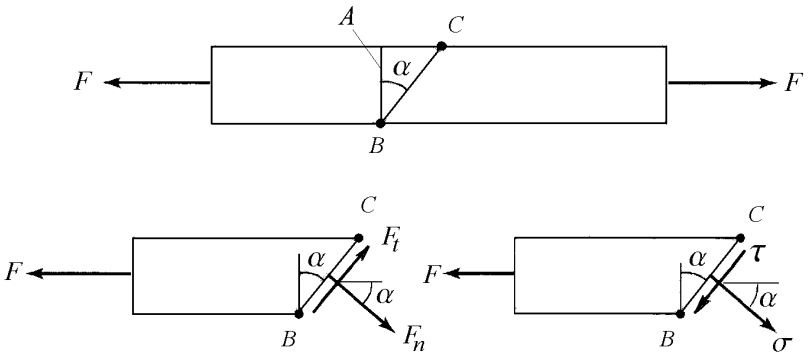


Fig. 5.15

Forţa interioară din secţiunea înclinată poate fi descompusă în două componente, una normală F_n şi una tangenţială F_t, în raport cu planul *BC*:

$$F_n = F\cos\alpha\,, \quad F_t = F\sin\alpha\,.$$

Aceste componente produc tensiuni normale σ şi tensiuni tangenţiale τ ale căror valori se obţin împărţind forţa respectivă la aria secţiunii înclinate $A\sec\alpha$:

$$\sigma = \frac{F_n}{A\sec\alpha} = \frac{F\cos\alpha}{A\sec\alpha} = \frac{F}{A}\cos^2\alpha\,,$$

$$\tau = -\frac{F_t}{A\sec\alpha} = -\frac{F\sin\alpha}{A\sec\alpha} = -\frac{F}{A}\sin\alpha\cos\alpha\,.$$

Înlocuind $F/A = \sigma_x$, rezultă

$$\sigma = \sigma_x \cos^2\alpha , \tag{5.44}$$

$$-\tau = \sigma_x \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sigma_x \sin 2\alpha . \tag{5.45}$$

Din relația (5.44) se observă că, atunci când $\alpha = 0$, σ are valoarea maximă σ_x iar când $\alpha = 90^0$, $\sigma = 0$, deci în bară nu există tensiuni normale transversale.

Din relația (5.45) rezultă că τ este maxim când $\sin 2\alpha$ este maxim, deci atunci când $2\alpha = 90^0$ şi 270^0, sau când $\alpha = 45^0$ şi 135^0.

Rezultatul se confirmă în practică. La materiale a căror rezistență la forfecare este mai mică decât jumătate din rezistența de rupere la tracțiune, încărcarea la întindere monoaxială produce ruperi la 45^0, în lungul planelor pe care acționează tensiuni tangențiale maxime. Astfel epruvetele de fontă solicitate la compresiune se fisurează la 45^0 față de direcția de aplicare a sarcinii.

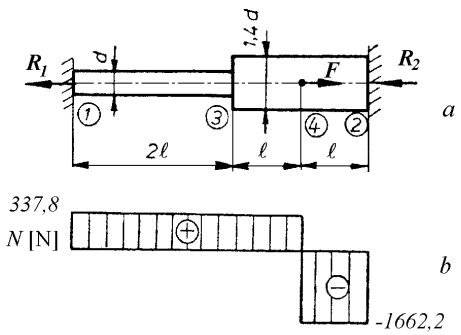


Fig. 5.16

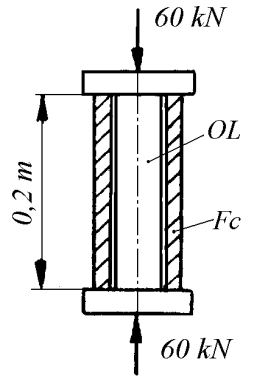


Fig. 5.17

Exemplul 5.1

Să se calculeze tensiunile normale în bara din figura 5.16, *a,* cu diametrul $d = 5$ mm, solicitată axial de o forță $F = 2$ kN.

Rezolvare

Ecuația de proiecții a forțelor pe orizontală este

$$R_1 + R_2 - F = 0 .$$

Condiția de deformație se scrie

$$\frac{R_1\, 2\ell}{E\, A_1} + \frac{R_1\, \ell}{E\, A_2} = \frac{R_2\, \ell}{E\, A_2}, \tag{5.46}$$

unde suprafețele secțiunilor transversale ale celor două tronsoane au ariile

$$A_1 = \frac{\pi\, d^2}{4} = 19{,}62\ \text{mm}^2,\ A_2 = \frac{\pi (1{,}4\, d)^2}{4} = 38{,}47\ \text{mm}^2.$$

După simplificări, ecuația (5.46) devine

$$R_2 = 4{,}92\, R_1,$$

deci reacțiunile au valorile

$$R_1 = \frac{F}{5{,}92} = \frac{2000}{5{,}92} = 337{,}8\ \text{N},\ R_2 = 4{,}92\, R_1 = 1662{,}2\ \text{N}.$$

Diagrama forțelor axiale este redată în figura 5.16, *b*.

Tensiunile au valorile

$$\sigma_{13} = \frac{N_{13}}{A_1} = \frac{337{,}8}{19{,}62} = 17{,}2\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\sigma_{34} = \frac{N_{34}}{A_2} = \frac{337{,}8}{38{,}47} = 8{,}78\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\sigma_{42} = \frac{N_{42}}{A_2} = -\frac{1662{,}2}{38{,}47} = -43{,}2\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Deoarece bara are secțiune variabilă, într-o aplicație concretă trebuie să se țină cont de concentrarea de tensiuni la saltul de diametru în secțiunea *3*.

Exemplul 5.2

Un suport format dintr-o tijă de oțel introdusă într-un manșon din fontă, este comprimat axial cu o forță de 60 kN (fig. 5.17). Cunoscând lungimea barei $\ell = 0{,}2$ m, aria secțiunii transversale a tijei $A_{OL} = 200$ mm^2, aria secțiunii manșonului $A_{Fc} = 800$ mm^2 și modulele de elasticitate $E_{OL} = 210$ GPa și $E_{Fc} = 120$ GPa, să se calculeze tensiunile care apar în tijă, respectiv manșon, alungirea totală $\Delta\ell$ și fracțiunile din efortul N preluate de tijă, respectiv manșon.

Rezolvare

Tensiunile se calculează cu relațiile (5.21)

$$\sigma_{OL} = \frac{N}{A_{OL} + \dfrac{E_{Fc}}{E_{OL}} A_{Fc}} = \frac{60 \cdot 10^3}{200 + \dfrac{1{,}2}{2{,}1} 800} = 91{,}3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\sigma_{Fc} = \frac{N}{A_{Fc} + \dfrac{E_{OL}}{E_{Fc}} A_{OL}} = \frac{60 \cdot 10^3}{800 + \dfrac{2{,}1}{1{,}2} 200} = 52{,}18 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Alungirea totală este

$$\Delta\ell = \frac{N\,\ell}{E_{OL}\,A_{OL} + E_{Fc}\,A_{Fc}} = \frac{-60 \cdot 10^3 \cdot 200}{2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 200 + 1{,}2 \cdot 10^5 \cdot 800} = -0{,}869 \text{ mm}.$$

Eforturile preluate de cele două piese sunt

$$N_{OL} = \sigma_{OL}\,A_{OL} = 91{,}3 \cdot 200 = 18260 \text{ N} = 18{,}26 \text{ kN},$$

$$N_{Fc} = \sigma_{Fc}\,A_{Fc} = 52{,}18 \cdot 800 = 41744 \text{ N} = 41{,}74 \text{ kN}.$$

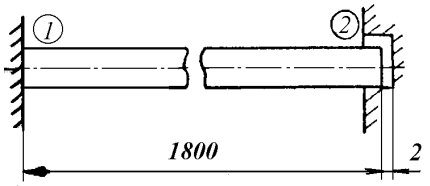


Fig. 5.18

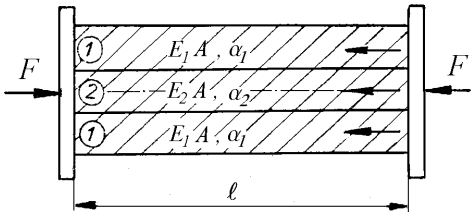


Fig. 5.19

Exemplul 5.3

O bară din cupru, având lungimea $\ell = 1{,}8$ m, este încastrată la extremitatea *1*, iar extremitatea *2* se poate deplasa liber 2 mm pe orizontală, după care deplasarea este împiedicată (fig. 5.18). Cunoscând coeficientul de dilatare termică liniară al cuprului $\alpha = 17 \cdot 10^{-6}$ grd^{-1} şi modulul de elasticitate longitudinal $E = 130$ GPa, să se determine tensiunile care apar în bară la o creştere a temperaturii cu 80^{o}C.

Rezolvare

Se determină întâi variația de temperatură Δt_1 pentru care bara se dilată liber cei 2 mm :

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta\ell}{\alpha\,\ell} = \frac{2}{17 \cdot 10^{-6} \cdot 1800} = 65{,}3^0 C.$$

La încălzirea în continuare a barei cu $\Delta t_2 = 80 - 65{,}3 = 14{,}7^0 C$, dilatarea este împiedicată, în bară dezvoltându-se tensiunile (5.17)

$$\sigma = -E\,\alpha\,\Delta t_2 = -1{,}3\cdot 10^5 \cdot 17 \cdot 10^{-6} \cdot 14{,}7 = -32{,}49 \text{ N/mm}^2 .$$

Exemplul 5.4

Ansamblul simetric din figura 5.19 este compus din trei bare având fiecare secţiunea transversală *A*, modulele de elasticitate E_1 şi $E_2 > E_1$, şi coeficienţii de dilatare termică liniară α_1 şi $\alpha_2 < \alpha_1$. Sub acţiunea forţei *F*, în bare apar tensiuni de compresiune neegale. Se cere să se calculeze creşterea temperaturii Δt prin care se realizează egalizarea tensiunilor în bare.

Rezolvare

Etapa I. Fie σ_1 şi σ_2 tensiunile în barele *1* şi, respectiv *2*. Condiţia de echivalenţă între forţe şi tensiuni se scrie

$$-F = 2\,A\,\sigma_1 + A\,\sigma_2 .$$

Rezultă o primă relaţie între tensiuni

$$2\sigma_1 + \sigma_2 = -\frac{F}{A},$$

iar din condiţia de deformaţie $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\dfrac{\sigma_1}{E_1} = \dfrac{\sigma_2}{E_2}$, o a doua relaţie între tensiuni

$$\sigma_2 = \frac{E_2}{E_1}\sigma_1 \ .$$

Se obţin tensiunile produse de forţa *F :*

$$\sigma_1 = -\frac{F\,E_1}{A\left(2E_1 + E_2\right)} \ , \ \sigma_2 = -\frac{F\,E_2}{A\left(2E_1 + E_2\right)}, \ \left|\sigma_1\right| < \left|\sigma_2\right| .$$

Etapa a IIa. Condiţia de deformaţie în cazul dilatării împiedicate

$$\ell\,\alpha_1\,\Delta t - \frac{N\,\ell}{E_1 2A} = \ell\,\alpha_2\,\Delta t + \frac{N\,\ell}{E_2\,A},$$

unde *N* este forţa axială de interacţiune între bara centrală şi barele laterale, se mai scrie sub forma

$$\left(\alpha_1 - \alpha_2\right)\Delta t = -\frac{\sigma_1^*}{E_1} - \frac{\sigma_2^*}{E_2}.$$

Se adaugă relaţia între forţa axială şi tensiunile în etapa a doua

$$\left|\sigma_1^* \, 2A\right| = \sigma_2^* A = N \,,$$

de unde rezultă şi semnificaţia tensiunilor notate cu steluţă.

Rezultă tensiunile termice

$$\left|\sigma_1^*\right| = \frac{\Delta t\,(\alpha_1 - \alpha_2)\,E_1\,E_2}{2E_1 + E_2} \;,\; \sigma_2^* = \frac{2\,\Delta t\,(\alpha_1 - \alpha_2)\,E_1\,E_2}{2E_1 + E_2} \;.$$

Prin suprapunerea efectelor, suma tensiunilor în cele două stări trebuie să fie aceeaşi

$$\sigma_1 - \sigma_1^* = \sigma_2 + \sigma_2^*,$$

$$-\frac{F\,E_1}{A\,(2E_1 + E_2)} - \frac{\Delta t\,(\alpha_1 - \alpha_2)\,E_1\,E_2}{2E_1 + E_2} = -\frac{F\,E_2}{A\,(2E_1 + E_2)} + \frac{2\,\Delta t\,(\alpha_1 - \alpha_2)\,E_1\,E_2}{2E_1 + E_2} \;.$$

Rezultă creşterea necesară a temperaturii pentru egalizarea tensiunilor

$$\Delta t = \frac{F\,(E_2 - E_1)}{3\,A\,(\alpha_1 - \alpha_2)\,E_1\,E_2}.$$

Exemplul 5.5

Un şurub de oţel cu diametrul $\delta = 10\,\text{mm}$ şi pasul filetului $h = 1{,}6\,\text{mm}$ este introdus într-un tub de cupru cu $d = 12\,\text{mm}$, $D = 18\,\text{mm}$ şi fixat cu o piuliţă fără strângere (Fig. 5.20). Lungimea părţii active a şurubului este $l = 100\,\text{mm}$. Să se calculeze tensiunile produse prin strângerea piuliţei cu o cheie şi rotirea 90^0 (un sfert de rotaţie). Se cunosc modulele de elasticitate la oţel $E_1 = 208\,\text{GPa}$ şi la cupru $E_2 = 100\,\text{GPa}$.

Rezolvare

La strângerea piuliţei, tubul este comprimat şi şurubul este întins, cu forţe egale şi de sens contrar X_1. Tubul este comprimat cu Δl_2 iar şurubul este întins cu Δl_1. Prin rotirea piuliţei, şurubul se scurtează cu *nh*, unde *n* este numărul de rotaţii complete. Alungirea şurubului însumată cu scurtarea tubului egalează modificarea lungimii şurubului prin strângerea piuliţei, egală cu numărul de rotiri ale piuliţei înmulţit cu pasul filetului. Condiţia de deformaţie se scrie

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = nh$$

sau, deoarece $nh << l$,

$$\frac{X_1 l}{E_1 A_1} + \frac{X_1 l}{E_2 A_2} = nh \,.$$

unde

$$A_1 = \frac{\pi\delta^2}{4} = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} = 78{,}54\ \text{mm}^2,$$

$$A_2 = \frac{\pi\left(D^2 - d^2\right)}{4} = \frac{\pi\left(18^2 - 12^2\right)}{4} = 141{,}37\ \text{mm}^2.$$

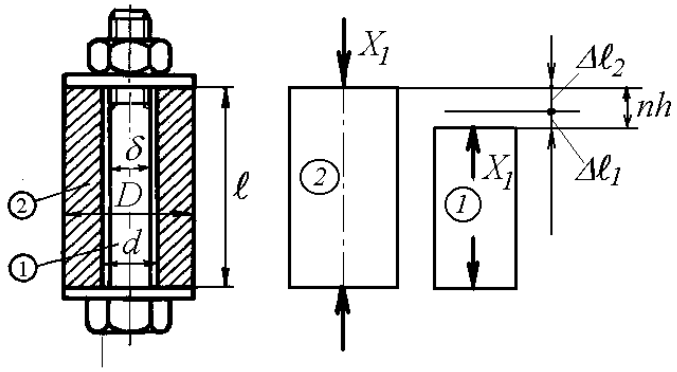


Fig. 5.20

Rezultă forţa axială

$$X_1 = \frac{nh}{\left(\frac{1}{E_1 A_1} + \frac{1}{E_2 A_2}\right) l} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \cdot 1{,}6}{\left(\frac{1}{2{,}08 \cdot 10^5 \cdot 78{,}54} + \frac{1}{10^5 \cdot 141{,}37}\right) 100} = 30316\ \text{N}.$$

Tensiunile din şurub sunt

$$\sigma_1 = \frac{X_1}{A_1} = \frac{30316}{78{,}54} = 386\ \text{MPa}.$$

Tensiunile din tub sunt

$$\sigma_2 = -\frac{X_1}{A_2} = -\frac{30316}{141{,}37} = -214{,}5\ \text{MPa}.$$

6.
RĂSUCIREA BARELOR

O bară dreaptă este solicitată la răsucire (torsiune) dacă în secțiunea transversală acționează un moment al cărui vector este dirijat în lungul axei barei. La bare curbe, răsucirea este produsă de un moment dirijat în lungul tangentei la axa barei.

Piese tipice solicitate la răsucire sunt arborii mașinilor, arborii cutiilor de viteze, elementele elastice de tip bară de torsiune din suspensiile automobilelor şi tancurilor, precum şi barele structurilor spațiale cu capetele încastrate.

Studiul răsucirii este simplificat la bare cu secțiune axial-simetrică, la care este valabilă ipoteza secțiunii plane şi la bare cu pereți subțiri, la care se consideră că tensiunile tangențiale sunt constante pe grosimea peretelui.

La bare cu secțiune plină de formă oarecare, secțiunea transversală se deplanează iar studiul tensiunilor şi deplasărilor se face cu metodele Teoriei elasticității. Împiedicarea deplanării produce tensiuni axiale suplimentare.

La răsucirea barelor cu pereți subțiri se adoptă ipoteza invariabilității secțiunii transversale. În general, barele cu profil deschis sunt mai puțin rigide decât barele similare cu profil închis.

6.1 Calculul momentului de răsucire

Atunci când asupra unei bare acționează mai multe cupluri exterioare, având vectorul dirijat în lungul axei barei, este necesară construcția unei diagrame de momente de răsucire (fig. 2.15).

În unele aplicații se dau puterea transmisă şi turația unui arbore, pe baza cărora trebuie calculat momentul de răsucire.

Dacă un arbore transmite puterea P (kW) la turația n (rot/min), momentul de răsucire se calculează cu relația

$$M_t = 9550\frac{P}{n} \quad [\text{Nm}].$$

Dacă se cunoaşte puterea N (CP) şi turația n (rot/min), atunci

$$M_t = 7026\frac{N}{n} \quad [\text{Nm}].$$

Relațiile de mai sus se bazează pe formula puterii în mişcarea de rotație:

$$\text{Puterea} = \text{Cuplul} \times \text{Viteza unghiulară}$$

deci

$$M_t\ [\text{Nm}] = \frac{puterea\ [\text{W}]}{viteza\ unghiulară\ [\text{rad/s}]} = \frac{1000 \cdot puterea\ [\text{kW}]}{\frac{\pi}{30} \cdot turatia\ [\text{rot/min}]} = \frac{30\,000}{\pi} \cdot \frac{P}{n}.$$

Deoarece

$$1\,\text{CP} = 75\frac{\text{kgf} \cdot \text{m}}{\text{s}} = 75 \cdot 9{,}81\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}} \approx 736\ \text{W} = 0{,}736\,\text{kW},$$

$$P\ [\text{kW}] = 0{,}736 \cdot N\ [\text{CP}]$$

şi deci rezultă

$$M_t\ [\text{Nm}] = \frac{30}{\pi}\ \frac{P\ [\text{W}]}{n} = \frac{30}{\pi} \cdot 75 \cdot 9{,}81\frac{N\ [\text{CP}]}{n} = 7025{,}895\frac{N}{n} \cong 7026\frac{N}{n}.$$

6.2 Tensiuni în bare de secțiune axial-simetrică

Se constată că dacă pe suprafața cilindrică a unei bare se trasează generatoare şi cercuri paralele, formând o rețea de pătrate curbilinii (fig. 6.1, *a*), după solicitarea barei la răsucire (fig. 6.1, *b*) pătratele devin romburi, lungimea laturilor rămânând neschimbată. De asemenea, secțiunile transversale rămân plane.

Se deduce că un element de bară din vecinătatea suprafeței laterale este solicitat numai de tensiuni tangențiale, altfel tensiunile normale ar fi produs alungirea laturilor. Se spune că elementul este solicitat la *forfecare pură*.

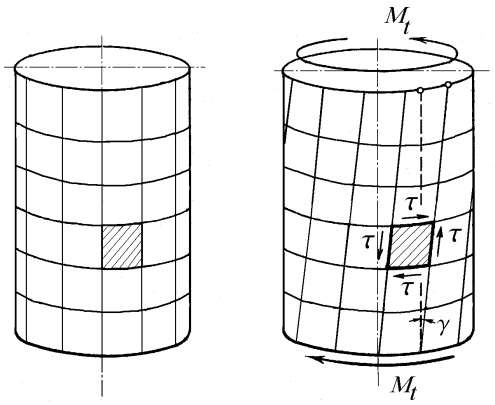
Se fac următoarele ipoteze:

a) bara este dreaptă şi are secțiune constantă pe toată lungimea;

b) momentul de torsiune este constant pe toată lungimea barei;

c) o secțiune transversală inițial plană, rămâne plană şi după răsucirea barei;

d) secțiunile sunt indeformabile şi se rotesc ca un rigid în jurul axei barei; ca urmare, o linie radială (rază) trasată într-o secțiune transversală rămâne dreaptă în timpul răsucirii barei.



a b

Fig. 6.1

Geometria deformației. Dacă dintr-o bară încastrată la un capăt, solicitată la răsucire, se decupează un element central de rază r şi lungime dx (fig. 6.2), atunci, în urma solicitării, generatoarea CB ocupă poziția CB', iar raza OB se deplasează în poziția OB'. Unghiul $\angle BCB' = \gamma$ este unghiul de lunecare specifică iar unghiul $\angle BOB' = \mathrm{d}\varphi$.

Se constată că deplasarea punctului B în B' este atât $\gamma\,\mathrm{d}x$ cât şi $r\,\mathrm{d}\varphi$, deci

$$\gamma\,\mathrm{d}x = r\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Variația unghiului de 90^o al generatoarei cu secțiunea din stânga este chiar unghiul de lunecare specifică

$$\gamma = r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = r\theta\,, \tag{6.1}$$

unde

$$\theta = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \tag{6.2}$$

se numeşte *unghi de răsucire specifică*. Acesta este unghiul cu care se rotesc una față de cealaltă două secțiuni situate la o distanță egală cu unitatea.

Relaţia tensiuni-deformaţii specifice. Aplicând legea lui Hooke pentru forfecare (3.23) rezultă

$$\tau = G\,\gamma = G\,\theta\ \ r\,. \tag{6.3}$$

Tensiunile tangenţiale variază liniar cu distanţa la centrul secţiunii. Ele sunt nule în centru şi au valori maxime la marginea secţiunii, fiind perpendiculare pe rază (fig. 6.3). Pe contur aceasta se deduce direct, pe baza dualităţii tensiunilor tangenţiale (3.3).

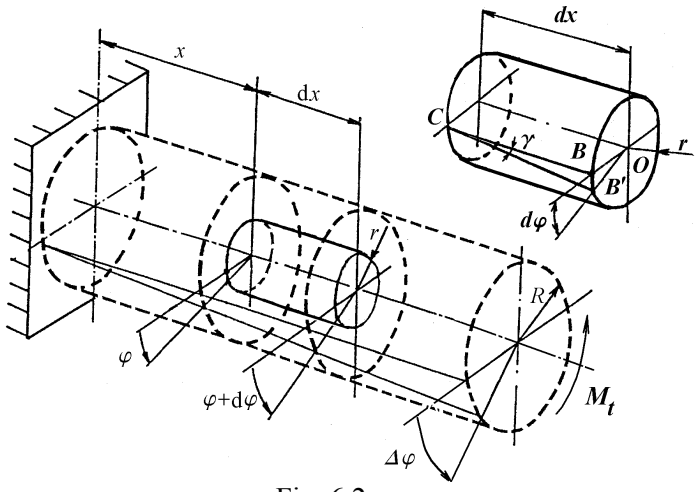


Fig. 6.2

Condiţiile de echilibru. Tensiunile τ produc forţe interioare care sunt în echilibru cu momentul de răsucire aplicat M_t. Tensiunea τ care acţionează pe un element de suprafaţă $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$ dă o forţă tăietoare $\tau\,\mathrm{d}A$ care produce un moment rezistent elementar faţă de centrul secţiunii $r\cdot\tau\,\mathrm{d}A$. Momentul rezistent total se obţine prin însumarea momentelor elementare care acţionează pe întreaga secţiune. Rezultă

$$M_t = \int_A r\,\tau\,\mathrm{d}A = G\theta \int_A r^2\,dA = G\,\theta\,I_p \tag{6.4}$$

unde

$$I_p = \int_A r^2\,\mathrm{d}A \tag{6.5}$$

este *momentul de inerţie polar* al secţiunii transversale.

Rezultă expresia unghiului de răsucire specifică

$$\theta = \frac{M_t}{G\,I_p}\,. \tag{6.6}$$

Înlocuind expresia (6.6) în relația (6.3) se obține formula tensiunilor tangențiale la răsucirea barelor de secțiune axial-simetrică

$$\boxed{\tau = \frac{M_t\, r}{I_p}} \qquad (6.7)$$

Tensiunea tangențială maximă este

$$\tau_{max} = \frac{M_t\, r_{max}}{I_p}\,. \qquad (6.8)$$

Dacă se notează

$$W_p = \frac{I_p}{r_{max}}, \qquad (6.9)$$

modulul de rezistență polar al secțiunii transversale, atunci relația (6.8) devine

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p}\,. \qquad (6.8,\, a)$$

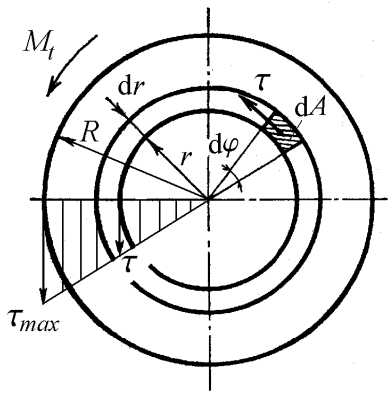


Fig. 6.3

Relația (6.8, *a*) este utilizată sub următoarele trei forme:

- formula de dimensionare: $W_{p_{nec}} = \frac{M_t}{\tau_a}$; (6.10, *a*)

- formula de verificare: $\tau_{ef} = \frac{M_t}{W_p} \le \tau_a$; (6.10, *b*)

- formula momentului de răsucire capabil: $M_{t_{cap}} = W_p \, \tau_a$. (6.10, *c*)

În relațiile (6.10), τ_a este rezistența admisibilă la răsucire.

6.3 Caracteristicile geometrice I_p şi W_p

Secțiunea circulară plină

În relația (6.5) se înlocuieşte $\mathrm{d}A = 2\pi r \, \mathrm{d}r$, aria inelului circular de grosime *d*r (fig. 6.3). Rezultă momentul de inerție polar

$$I_p = 2\pi \int_0^{D/2} r^3 \, \mathrm{d}r = \frac{\pi D^4}{32} \tag{6.11}$$

unde $D = 2R$ este diametrul secțiunii.

Din relația (6.9) se obține modulul de rezistență polar

$$W_p = \frac{I_p}{r_{max}} = \frac{\dfrac{\pi D^4}{32}}{\dfrac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{16}. \tag{6.12}$$

Secțiunea inelară circulară

Dacă bara are o gaură centrală de diametru *d*, atunci momentul de inerție polar este

$$I_p = 2\pi \int_{d/2}^{D/2} r^3 \, \mathrm{d}r = \frac{\pi \left(D^4 - d^4\right)}{32}. \tag{6.13}$$

Modulul de rezistență polar al secțiunii inelare are expresia

$$W_p = \frac{I_p}{r_{max}} = \frac{\dfrac{\pi \left(D^4 - d^4\right)}{32}}{\dfrac{D}{2}} = \frac{\pi \left(D^4 - d^4\right)}{16\, D}. \tag{6.14}$$

Pentru un inel subțire de rază *R* şi grosime *h* se obține

$$I_p = 2\pi R^3 h, \qquad W_p = 2\pi R^2 h.$$

Exemplul 6.1

O bară din oţel cu rezistenţa admisibilă $\tau_a = 50$ N/mm^2 este solicitată la răsucire de un moment $M_t = 750$ Nm. Se cere să se dimensioneze bara în două variante: a) de secţiune circulară plină, cu diametrul δ; b) de secţiune inelară, cu diametrul interior *d*, diametrul exterior *D* şi $d = 0{,}8\,D$. Să se compare ariile secţiunilor transversale în cele două cazuri.

Rezolvare

Pentru ambele variante, din formula (6.10, *a*) se obţine modulul de rezistenţă polar necesar

$$W_{p_{nec}} = \frac{M_t}{\tau_a} = \frac{750 \cdot 10^3}{50} = 15 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 .$$

Varianta 1.

$$0{,}2\,\delta^3 = 15 \cdot 10^3 , \qquad \delta = 42 \text{ mm} , \qquad A_1 = \frac{\pi \delta^2}{4} = 1385 \text{ mm}^2 .$$

Varianta 2.

$$0{,}2\,D^3 \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] = 0{,}2 \left(1 - 0{,}8^4 \right) D^3 = 0{,}1181\,D^3 = 15 \cdot 10^3 ,$$

$$D = 50 \text{ mm} , \qquad d = 40 \text{ mm} , \qquad A_2 = \frac{\pi\, D^2}{4} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right] = 707 \text{ mm}^2 .$$

Se observă că $\frac{A_1}{A_2} \cong 2$ deci, la lungimi egale, greutatea barei de secţiune inelară este jumătate din greutatea barei de secţiune circulară plină, pentru aceeaşi tensiune tangenţială maximă pe conturul secţiunii. Aceasta se explică prin variaţia liniară a tensiunilor tangenţiale în lungul razei. Secţiunea inelară are aria distribuită mai avantajos pentru a prelua tensiunile mari din vecinătatea suprafeţei piesei.

6.4 Deformaţii la răsucire

Din relaţiile (6.2) şi (6.6) se obţine unghiul de răsucire pentru un element de bară de lungime d*x*:

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{M_t \,\mathrm{d}x}{G\, I_p} ,$$

unde produsul $G\, I_p$ se numeşte *modùl de rigiditate la răsucire*.

Pentru o bară de lungime ℓ, unghiul cu care se rotesc una față de cealaltă cele două secțiuni de la capete este

$$\Delta\varphi = \int_0^{\ell} \frac{M_t \, \mathrm{d}x}{G I_p}. \tag{6.15}$$

Dacă bara are secțiune constantă şi momentul de răsucire este constant pe toată lungimea, atunci

$$\Delta\varphi = \frac{M_t \, \ell}{G I_p}. \tag{6.16}$$

Pentru un tronson de arbore de secțiune constantă, rigiditatea la răsucire este

$$k = \frac{M_t}{\Delta\varphi} = \frac{G I_p}{\ell}. \tag{6.17}$$

Există arbori la care se impune o valoare admisibilă θ_a a unghiului de răsucire specifică. Din relația (6.6) rezultă formula de dimensionare bazată pe o condiție de rigiditate

$$I_{p\,nec} = \frac{M_t}{G\,\theta_a}. \tag{6.18}$$

Dacă se utilizează relațiile (6.10, a) şi (6.18), rezultă două dimensiuni diferite, dintre care se alege cea mai mare.

6.5 Energia de deformație la răsucire

Pentru un element de bară de lungime dx, lucrul mecanic efectuat de momentul M_t, a cărui valoare creşte liniar cu rotirea $\mathrm{d}\varphi$, este $\frac{1}{2} M_t \, \mathrm{d}\varphi$. Lucrul mecanic total, înmagazinat de toată bara sub formă de energie potențială de deformație, este

$$U = \int_{\ell} \frac{1}{2} M_t \, d\varphi = \int_{\ell} \frac{M_t^2 \, \mathrm{d}x}{2 G I_p}. \tag{6.19}$$

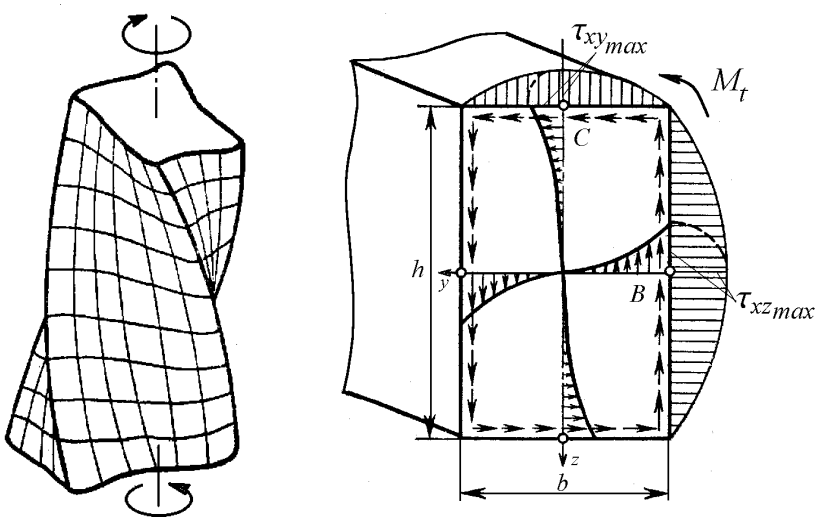
Pe baza relațiilor (6.5) şi (6.7), notând $\mathrm{d}V = \mathrm{d}A \, \mathrm{d}x$, se mai obține

$$U = \int_V \frac{\tau^2}{2G} \mathrm{d}V \tag{6.19, a}$$

unde $U_0 = \dfrac{\tau^2}{2G}$ este *energia de deformație specifică* la forfecare.

6.6 Răsucirea barelor cu secțiune dreptunghiulară

Studiul răsucirii barelor cu secțiune dreptunghiulară se face prin metodele Teoriei elasticității, deoarece în acest caz ipoteza secțiunii plane nu mai este valabilă. Secțiunile transversale ale barelor se *deplanează* (fig. 6.4, *a*). În figura 6.4, *b* se arată distribuția tensiunilor tangențiale pe o secțiune dreptunghiulară.



a b

Fig. 6.4

Tensiunea tangențială maximă se produce la mijlocul laturii mari a dreptunghiului şi are valoarea

$$\tau_{max} = \tau_B = \tau_{xz_{max}} = \frac{M_t}{\alpha\, h\, b^2}\,. \tag{6.20}$$

La mijlocul laturii mici

$$\tau_{xy_{max}} = \tau_C = \gamma\, \tau_{xz_{max}} = \gamma\, \tau_B\,.$$

Unghiul de răsucire specifică se calculează cu relația

$$\theta = \frac{M_t}{\beta\, h\, b^3\, G}\,. \tag{6.21}$$

Valorile coeficienților α, β şi γ sunt date în tabelul 6.1 pentru câteva valori ale raportului laturilor h/b.

Tabelul 6.1

h/b	1	1,5	2	2,5	3	4	6	10	∞
α	0,208	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,313	0,333
γ	1,000	0,859	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742

În general, pentru secțiuni pline oarecare, se utilizează relații generalizate de forma

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} \qquad \text{şi} \qquad \theta = \frac{M_t}{G\, I_t} \tag{6.22}$$

unde W_t este *modulul de rezistență la răsucire*, iar I_t este *momentul de inerție la răsucire* al secțiunii (Anexa 3).

Relații pentru calculul acestor caracteristici geometrice se dau în manuale de specialitate. La secțiunea circulară, W_t şi I_t sunt egale cu W_p, respectiv I_p.

În cazul unei platbande subțiri, raportul h/b este foarte mare, astfel că din relațiile (6.20) şi (6.21) se obține

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{\frac{1}{3} h\, b^2} = G\, \theta\, b\,, \qquad \theta = \frac{M_t}{\frac{1}{3} h\, b^3\, G}\,, \tag{6.23}$$

deci

$$W_t = \frac{1}{3} h\, b^2 \qquad \text{şi} \qquad I_t = \frac{1}{3} h\, b^3\,. \tag{6.24}$$

Răsucirea barelor poate fi studiată prin *analogia cu membrana* (Prandtl) sau prin *analogia hidrodinamică* (Greenhill).

În primul caz, se studiază deformațiile unei membrane aplicate peste un orificiu având forma secțiunii transversale a barei, sub acțiunea unei presiuni uniform distribuite. Pe membrana bombată se trasează curbele de nivel. Densitatea curbelor de nivel sau panta membranei într-un punct oarecare sunt proporționale cu tensiunea tangențială din bară în punctul respectiv. Tangenta la curba de nivel arată direcția tensiunii tangențiale. Volumul cuprins între planul conturului şi suprafața bombată a membranei este proporțional cu modulul de rigiditate la răsucire al secțiunii transversale a barei.

În al doilea caz, se studiază liniile de curent ale curgerii unui lichid incompresibil printr-un vas având forma secțiunii barei solicitate la răsucire. Viteza fluidului într-un punct este proporțională cu tensiunea tangențială în punctul respectiv al barei răsucite.

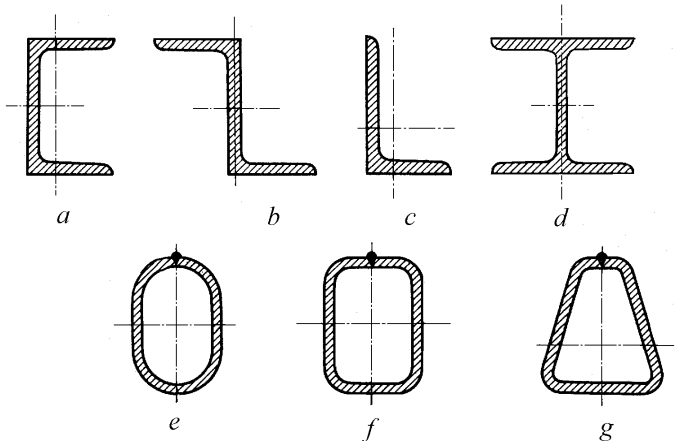


Fig. 6.5

6.7 Răsucirea profilelor deschise cu pereți subțiri

Barele cu pereți subțiri se mai numesc şi profile. La profilele cu secțiunea deschisă (fig. 6.5, *a, b, c, d*), secțiunea transversală are un singur contur, constituind un domeniu simplu conex. Unele profile laminate din oțel şi anumite profile din aluminiu sunt standardizate, având denumiri consacrate: profil U (fig. 6.5, *a*), profil Z (fig. 6.5, *b*), cornier cu aripi neegale (fig. 6.5, *c*) şi profil I sau dublu-T (fig. 6.5, *d*). În general, profilele deschise sunt formate din porțiuni dreptunghiulare, colțurile fiind racordate la interior pentru diminuarea concentrării de tensiuni.

La profilele închise din figurile 6.5, *e, f, g*, secțiunea transversală constituie un domeniu dublu conex. În construcțiile aeronautice se utilizează şi profile închise de mai multe ori, deci multiplu conexe.

Se arată, atât experimental cât şi cu metodele Teoriei elasticității, că dacă se îndoaie o platbandă subțire şi se realizează bare solicitate la răsucire având profil deschis (fig. 6.6), valorile tensiunii tangențiale maxime şi a unghiului de răsucire specifică nu se modifică. Acestea se pot calcula cu relațiile (6.23)

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{\frac{1}{3} S \delta^2} = G \theta \delta , \qquad \theta = \frac{M_t}{\frac{1}{3} S \delta^3 G} , \qquad (6.23, a)$$

în care S este lungimea liniei mediane desfăşurate a profilului iar δ este grosimea.

Pentru profilele deschise care pot fi descompuse în dreptunghiuri, se poate considera că diferitele dreptunghiuri de dimensiuni $\delta_i \times s_i$ acționează independent şi preiau o parte din momentul de răsucire aplicat (fig. 6.7).

Modulul de rigiditate la răsucire este

$$C = G\,I_t = c\frac{G}{3}\sum_i s_i\,\delta_i^3, \qquad (6.25)$$

unde coeficientul c ţine cont de creşterea rigidităţii datorită racordărilor profilului. Se recomandă $c = 1$ la corniere, $c = 1{,}1$ la profile U şi T, şi $c = 1{,}25$ la profile I.

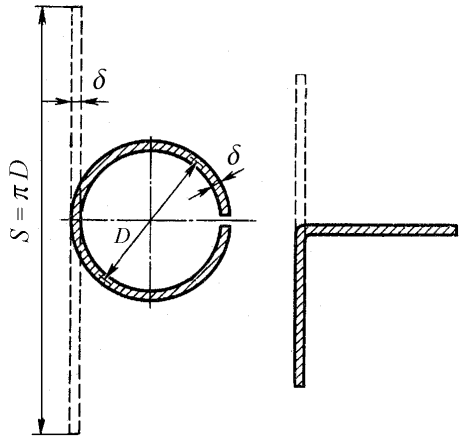


Fig. 6.6

Tensiunea tangenţială maximă în fiecare dreptunghi care compune secţiunea este

$$\tau_{max\,i} = G\,\theta\,\delta_i \qquad (6.26)$$

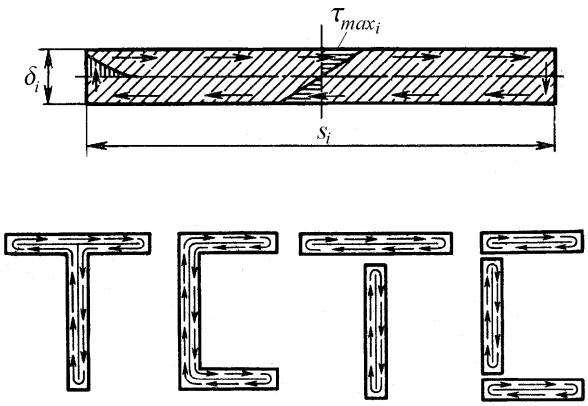


Fig. 6.7

unde unghiul de răsucire specifică este

$$\theta = \frac{M_t}{C}. \qquad (6.27)$$

Rezultatele sunt valabile pentru bare în care momentul de răsucire este constant pe toată lungimea şi pentru cazul răsucirii libere (deplanare neîmpiedicată).

Exemplul 6.2

Să se calculeze tensiunile tangeţiale maxime şi unghiul de răsucire specifică la profilul din aluminiu din figura 6.8, solicitat de un moment de răsucire de 20 Nm. Se cunoaşte $G = 27$ GPa .

Rezolvare

Se consideră că profilul U este compus din trei platbande subţiri, cele două tălpi şi inima. Fie M_{t1} momentul de răsucire preluat de fiecare talpă şi M_{t2} momentul preluat de inimă.

Din a doua relaţie (6.23, *a*) se obţine :

$$M_{t1} = \frac{1}{3} \cdot 75 \cdot 2^3 \cdot 27 \cdot 10^3 \cdot \theta = 5{,}4 \cdot 10^6 \cdot \theta \quad \text{[Nmm]},$$

$$M_{t2} = \frac{1}{3} \cdot 150 \cdot 3^3 \cdot 27 \cdot 10^3 \cdot \theta = 36{,}5 \cdot 10^6 \cdot \theta \quad \text{[Nmm]}.$$

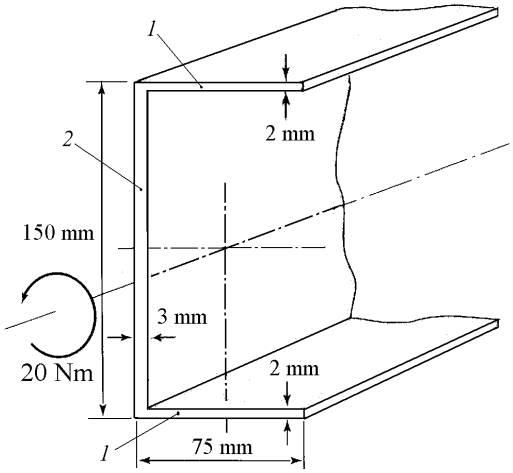


Fig. 6.8

Înlocuind în condiția de echilibru

$$2\,M_{t\,1} + M_{t_2} = 20 \cdot 10^3$$

expresiile momentelor de răsucire din inimă şi tălpi, se obține

$$47{,}3\,\theta = 20 \cdot 10^{-3},$$

deci unghiul de răsucire specifică este

$$\theta = 0{,}422 \cdot 10^{-3} \text{ rad/mm} = 0{,}422 \text{ rad/m} = 24{,}2\ ^0/\text{m}.$$

Din prima relație (6.23, *a*) rezultă tensiunea tangențială maximă în tălpi

$$\tau_{max\,1} = 27 \cdot 10^3 \cdot 0{,}422 \cdot 10^{-3} \cdot 2 = 22{,}8 \text{ N/mm}^2$$

şi tensiunea tangențială maximă în inimă

$$\tau_{max\,2} = 27 \cdot 10^3 \cdot 0{,}422 \cdot 10^{-3} \cdot 3 = 34{,}2 \text{ N/mm}^2.$$

6.8 Răsucirea profilelor închise cu pereți subțiri

Studiul profilelor subțiri închise se face adoptând *ipoteza constanței secțiunii transversale* şi *ipoteza nedeformabilității secțiunii transversale*, deci considerând că deformația secțiunii transversale este o rotație de rigid iar proiecția liniei mediane pe un plan perpendicular pe axa barei nu se modifică.

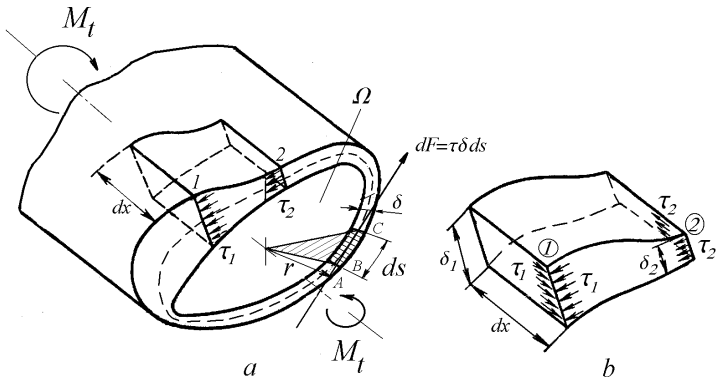


Fig. 6.9

Se consideră un profil subțire închis, de formă oarecare (fig. 6.9), având grosimea peretelui δ variabilă. Spre deosebire de secțiunile deschise, momentul M_t produce tensiuni tangențiale uniform distribuite pe grosimea peretelui (ipoteza lui Bredt).

Se izolează un element infinitezimal din peretele profilului, de lățime dx paralelă cu axa barei şi de lungime arbitrară în lungul liniei mediane a profilului (desenată punctat).

Fie δ_1 grosimea în punctul *1* şi δ_2 grosimea în punctul *2*. Tensiunile τ_1 şi τ_2 sunt constante pe grosimea peretelui. Conform dualității tensiunilor tangențiale (3.3), pe fețele longitudinale din *1* şi *2* acționează tensiuni egale cu tensiunile tangențiale din planul secțiunii transversale, perpendiculare pe muchia comună. Forța tăietoare pe fața *1,* în lungul axei barei, este $\tau_1 \delta_1 \,\mathrm{d}x$. Pentru echilibrul longitudinal al elementului izolat, această forță trebuie să fie egală cu forța $\tau_2 \delta_2 \,\mathrm{d}x$ care acționează pe fața *2*. Rezultă $\tau_1\delta_1 = \tau_2\delta_2$ şi deoarece punctele *1* şi *2* au fost alese arbitrar, produsul $\tau\,\delta$ este constant în lungul conturului. Mărimea $q = \tau\,\delta$ se numeşte *flux de forfecare* şi reprezintă o forță tăietoare pe unitatea de lungime a liniei mediane a secțiunii profilului subțire.

Forța dF care acționează tangențial la contur, pe un element de lungime ds, este $\tau\,\delta\,\mathrm{d}s$. Momentul acestei forțe față de axa barei (sau față de un punct din secțiune ales arbitrar) este $\tau\,\delta\,r\,\mathrm{d}s$ iar momentul total este

$$M_t = \oint \tau\,\delta\,r\,\mathrm{d}s\,.$$

Deoarece $\tau\,\delta = q$ este constant în lungul conturului, momentul de răsucire se mai scrie

$$M_t = \tau\,\delta \oint r\,\mathrm{d}s = q \oint r\,\mathrm{d}s\,.$$

Dar $r\,\mathrm{d}s$ este dublul suprafeței haşurate şi $\oint r\,\mathrm{d}s$ pentru tot conturul este 2Ω, unde Ω este aria delimitată de linia mediană a peretelui profilului (desenată punctat). Rezultă

$$M_t = 2\Omega\,q\,. \tag{6.28}$$

Tensiunile tangențiale au valoarea (formula lui Bredt)

$$\tau = \frac{M_t}{2\,\Omega\,\delta}\,. \tag{6.29}$$

Pentru calculul unghiului de răsucire, se egalează energia de deformație exprimată în funcție de momentul de răsucire M_t cu energia de deformație exprimată în funcție de tensiunile tangențiale τ (6.19, *a*).

Energia înmagazinată într-un element de dimensiuni ds, dx, δ este

$$dU = \frac{\tau^2}{2\,G}\,\delta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\,.$$

Energia acumulată în tot profilul de lungime ℓ este

$$U = \frac{\ell}{2G} \oint \tau^2 \delta \, \mathrm{d}s = \frac{\ell \tau^2 \delta^2}{2G} \oint \frac{\mathrm{d}s}{\delta}$$

sau, înlocuind tensiunile tangențiale din relația (6.29), se obține

$$U = \frac{M_t^2 \ell}{8 \Omega^2 G} \oint \frac{\mathrm{d}s}{\delta} . \tag{6.30}$$

Pe de altă parte, energia de deformație este egală cu lucrul mecanic al cuplului elastic M_t pe rotirea $\Delta\varphi$

$$U = \frac{1}{2} M_t \, \Delta\varphi . \tag{6.31}$$

Egalând expresiile (6.30) şi (6.31) ale energiei de deformație, se obține unghiul de răsucire specifică (formula lui Bredt)

$$\frac{\Delta\varphi}{\ell} = \theta = \frac{M_t}{4\Omega^2 G} \oint \frac{\mathrm{d}s}{\delta} . \tag{6.32}$$

Dacă profilul are grosimea δ constantă în lungul conturului, atunci

$$\frac{\Delta\varphi}{\ell} = \theta = \frac{M_t \, S}{4\Omega^2 G \, \delta} = \frac{\tau \, S}{2 \Omega \, G} , \tag{6.33}$$

unde *S* este lungimea totală a liniei mediane a conturului închis.

Exemplul 6.3

Să se compare tensiunile tangețiale maxime şi rigiditățile la răsucire pentru un tub circular cu pereți subțiri şi un tub cu aceleaşi dimensiuni, în care s-a tăiat o fantă longitudinală pe toată lungimea (fig. 6.10), solicitate de momente de răsucire egale.

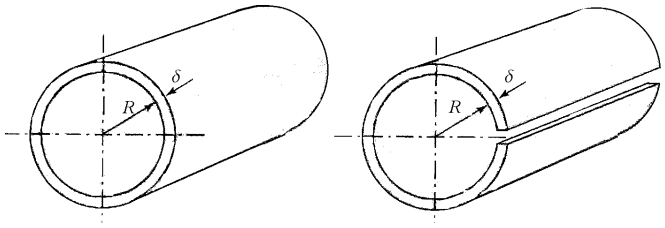


Fig. 6.10

Rezolvare

La profilul închis, din relațiile (6.8,a) şi (6.17) se obține

$$\tau_{max\,1} = \frac{M_t\, R}{I_p} = \frac{M_t\, R}{2\pi R^3\, \delta} = \frac{M_t}{2\pi R^2\, \delta},$$

$$k_1 = \frac{M_t}{\Delta\varphi_1} = \frac{G\, I_p}{\ell} = \frac{G}{\ell} 2\pi R^3\, \delta .$$

La profilul deschis, din relațiile (6.23) şi (6.24) se obține

$$\tau_{max\,2} = \delta \frac{3\, M_t}{s\, \delta^3} = \frac{3\, M_t}{2\pi R\, \delta^2},$$

$$k_2 = \frac{M_t}{\Delta\varphi_2} = \frac{G\, I_t}{\ell} = \frac{G}{\ell} \frac{2}{3} \pi R\, \delta^3 .$$

Raportul tensiunilor tangențiale maxime este

$$\frac{\tau_{max\,2}}{\tau_{max\,1}} = 3 \frac{R}{\delta} .$$

Raportul rigidităților la răsucire este

$$\frac{k_1}{k_2} = 3 \frac{R^2}{\delta^2} .$$

Dacă $R/\delta = 10$, atunci tensiunile în tubul deschis sunt de 30 de ori mai mari decât cele din tubul închis, în schimb rigiditatea tubului deschis este de 300 ori mai mică decât cea a tubului închis.

În general, la profilele deschise solicitate la răsucire, tensiunile tangențiale sunt mari şi deformabilitatea este mare. Rezultă că profilele deschise cu pereți subțiri nu sunt adecvate pentru a prelua solicitări de răsucire sau a împiedica deformațiile produse de această solicitare.

6.9 Calculul arcurilor cilindrice elicoidale

Arcul cilindric elicoidal este o bară curbă în spațiu. La un arc solicitat la întindere (fig. 6.11, *a*), dacă înclinarea spirelor este mare atunci forța *F*, redusă în centrul de greutate al secțiunii transversale, produce toate cele patru solicitări simple: întindere, forfecare, încovoiere şi răsucire (fig. 6.11, *b*).

La arcurile cu spire strânse, la care înclinarea elicei este foarte mică, forța axială şi momentul încovoietor se pot neglija, rămânând forța tăietoare $T = F$ şi momentul de răsucire $M_t = F\, R$.

La arcuri cu raza de înfăşurare mare în comparație cu diametrul spirei $(d << R)$, efectul forfecării este neglijabil, solicitarea principală fiind răsucirea.

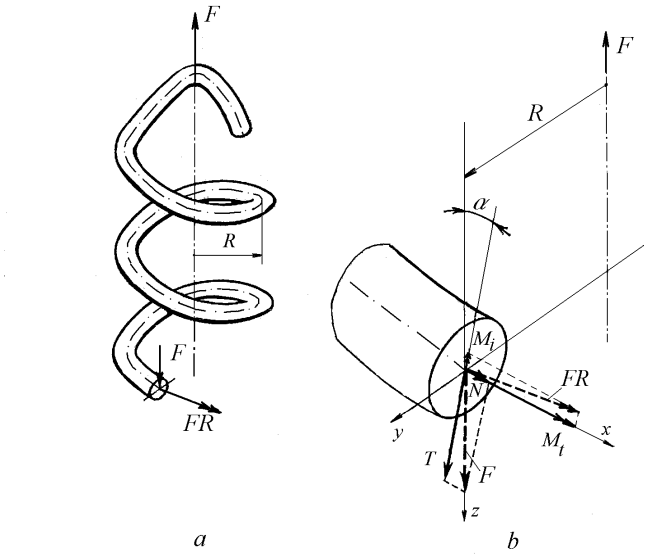


Fig. 6.11

Din formula de dimensionare la răsucire (6.11, *a*), în cazul secțiunii circulare, rezultă:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{M_t}{\tau_a} = \frac{F R}{\tau_a}$$

de unde se obține diametrul spirei arcului

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 F R}{\pi \tau_a}}. \qquad (6.34)$$

Numărul de spire *n* se calculează pe baza formulei săgeții arcului. Aceasta se poate deduce egalând lucrul mecanic produs de forța *F* când arcul se deformează cu săgeata *f*, cu energia de deformație la răsucire, înmagazinată de arc

$$\frac{1}{2} F f = \int_{\ell} \frac{M_t^2 \, \mathrm{d}x}{2 G I_p} = \frac{M_t^2 \, \ell}{2 G I_p},$$

unde $M_t = F R$, $\ell = 2 \pi R n$, $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$.

Rezultă săgeata arcului

$$f = \frac{64\,F\,R^3\,n}{G\,d^4}. \tag{6.35}$$

Relația (6.35) se mai scrie sub forma

$$F = \frac{G\,d^4}{64\,R^3\,n}\,f = k\,f\,, \tag{6.36}$$

unde k este rigiditatea arcului (denumită şi *constanta elastică* a arcului). Reprezentarea grafică a relației (6.36) se numeşte *caracteristica elastică a arcului.*

Dacă se impune valoarea rigidității arcului

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta f},$$

din relația (6.36) rezultă numărul de spire necesar

$$n = \frac{G\,d^4}{64\,R^3\,k}\,. \tag{6.37}$$

La oțelurile de arcuri $\tau_a = 400 - 600$ N/mm^2 şi $G = 85$ GPa.

6.10 Sisteme static nedeterminate solicitate la răsucire

La sisteme static nedeterminate, reacțiunile şi eforturile din bare nu pot fi determinate numai cu ajutorul ecuațiilor de echilibru din statică. Diferența între numărul reacțiunilor (sau eforturilor necunoscute) şi numărul ecuațiilor de echilibru se numeşte *grad de nedeterminare* al sistemului. Pentru rezolvarea problemelor static nedeterminate se utilizează ecuații de echilibru, ecuații de compatibilitate geometrică, relații forță-deformație şi condiții la limită. Deobicei se elimină deformațiile şi deplasările între ultimele trei tipuri de ecuații, rezultând un număr de condiții de deformație, exprimate în funcție de eforturi sau reacțiuni, egal cu gradul de nedeterminare.

6.10.1 Bara încastrată la capete

Fie bara din figura 6.12, *a* încastrată la capete şi solicitată de momentul *M*. Se cunosc dimensiunile *a, b, d* şi modulul de elasticitate *G*. Se cer tensiunile tangențiale maxime din bară.

Rezolvare

Reacţiunile din încastrări sunt momentele M_1 şi M_2.

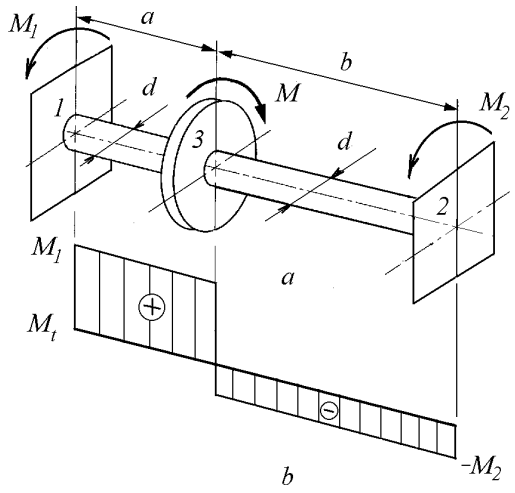


Fig. 6.12

Ecuaţia de echilibru. Ecuaţia de proiecţii pe orizontală a momentelor se scrie

$$M_1 - M + M_2 = 0\,. \tag{6.38}$$

Compatibilitatea deformaţiilor. În urma aplicării cuplului *M,* secţiunea 3 se roteşte, dar suma unghiurilor de răsucire ale celor două porţiuni *1-3* şi *3-2* este zero, bara fiind încastrată la capete

$$\Delta\varphi_{13} + \Delta\varphi_{32} = 0. \tag{6.39}$$

Relaţiile forţă-deformaţie. Pe baza legii lui Hooke s-a stabilit expresia (6.16) a unghiurilor de răsucire care, pentru cele două porţiuni de bară, se scrie

$$\Delta\varphi_{13} = \frac{M_{13}\,a}{G\,I_{\mathrm{p}}},\ \Delta\varphi_{32} = \frac{M_{32}\,b}{G\,I_{\mathrm{p}}}\ . \tag{6.40}$$

Din diagrama momentelor de răsucire (fig. 6.12, *b*) rezultă

$$M_{13} = M_1\,, \qquad M_{32} = M_1 - M = -M_2\,. \tag{6.41}$$

Din relaţiile (6.39)-(6.41) se obţin reacţiunile

$$M_1 = M\frac{b}{\ell}, \qquad M_2 = M\frac{a}{\ell}, \tag{6.42}$$

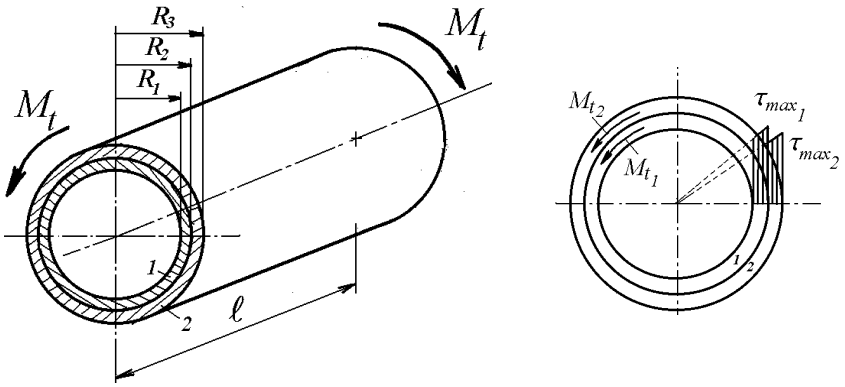
deci tensiunile tangenţiale maxime în cele două porţiuni de bară au expresiile

$$\tau_{13} = \frac{M_{13}}{W_p} = \frac{M\,b}{W_p\,\ell}, \qquad |\tau_{32}| = \frac{|M_{32}|}{W_p} = \frac{M\,a}{W_p\,\ell} \tag{6.43}$$

unde W_p se calculează cu relația (6.12).

6.10.2 Arbori concentrici

Se cer tensiunile tangențiale produse de momentul M_t în arborele din figura 6.13, *a*, compus din două tuburi subțiri din materiale diferite, solidarizate între ele. Se cunosc modulele de elasticitate transversale G_1 şi G_2 ale celor două materiale.



a b

Fig. 6.13

Rezolvare

Ecuația de echilibru. Cuplul exterior M_t este preluat în proporții diferite de cele două materiale. Suma momentelor de răsucire M_{t1} şi M_{t2} egalează momentul total:

$$M_{t1} + M_{t2} = M_t\,. \tag{6.44}$$

Compatibilitatea deformațiilor. Cele două materiale, cu aceeaşi lungime inițială ℓ, au deformații la răsucire identice, fiind solidarizate între ele:

$$\theta_1 = \theta_2\,. \tag{6.45}$$

Relațiile forță-deformație. Pe baza legii lui Hooke, s-a stabilit expresia unghiurilor de răsucire specifică (6.6), care pentru cele două materiale se scrie

$$\theta_1 = \frac{M_{t1}}{G_1 I_{p1}}, \quad \theta_2 = \frac{M_{t2}}{G_2 I_{p2}}. \tag{6.46}$$

Înlocuind relațiile (6.46) în (6.45) şi utilizând ecuația (6.44) se obține

$$\frac{M_{t1}}{G_1 I_{p1}} = \frac{M_{t2}}{G_2 I_{p2}} = \frac{M_t}{G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2}}.$$

Rezultă tensiunile în cele două materiale la o distanță *r* față de centru

$$\tau_1 = \frac{M_{t1} r}{I_{p1}} = \frac{M_t r}{I_{p1} + \frac{G_2}{G_1} I_{p2}}; \qquad \tau_2 = \frac{M_{t2} r}{I_{p2}} = \frac{M_t r}{I_{p2} + \frac{G_1}{G_2} I_{p1}}. \tag{6.47}$$

Înlocuind $r = R_2$ în relațiile (6.47), se obține

$$\frac{\tau_{max1}}{\tau_{min2}} = \frac{G_1}{G_2}.$$

Se observă că în dreptul suprafeței de contact, tensiunile tangențiale în cele două materiale sunt diferite, raportul lor fiind egal cu raportul modulelor de elasticitate transversale. De acest fapt trebuie ținut cont la solidarizarea materialelor.

Diagramele de variație a tensiunilor tangențiale în lungul razei sunt date în figura 6.13, *b*.

Acelaşi rezultat s-ar obține dacă cei doi arbori concentrici ar fi solidarizați doar la capete.

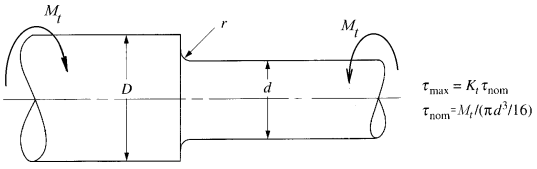
6.11 Concentrarea tensiunilor la răsucirea barelor

Calculul la răsucire, bazat pe relația (6.8, *a*), este valabil numai pentru bare de secțiune constantă. Discontinuitățile geometrice, de exemplu, arbore în trepte, găuri transversale, degajări, şanțuri de pană, produc variații locale importante ale tensiunilor, ale căror valori maxime sunt mai mari decât cele calculate în ipoteza constanței secțiunii transversale. La un concentrator de tensiuni, tensiunea maximă este funcție de forma şi dimensiunile piesei în vecinătatea discontinuității.

La răsucire, *factorul de concentrare a tensiunilor elastice* K_t se defineşte prin relația

$$K_t = \frac{\tau_{max}}{\tau_{nom}} \tag{6.48}$$

unde τ_{max} este tensiunea maximă la discontinuitatea geometrică iar τ_{nom} este valoarea obținută neglijând efectul de concentrare a tensiunilor.



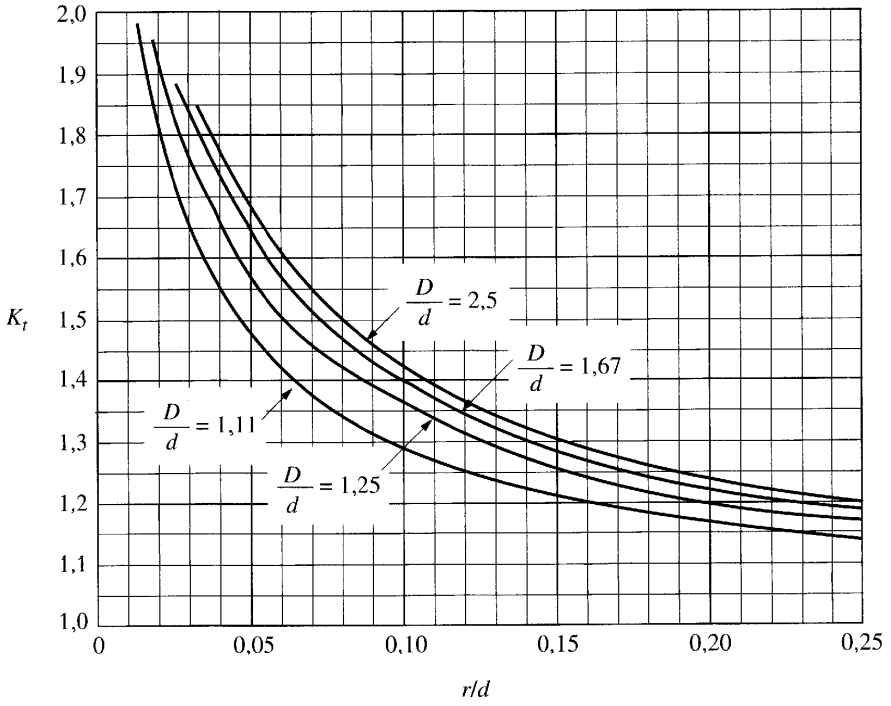


Fig. 6.14 [43]

Pentru o bară solicitată la răsucire, cu secțiune variabilă în trepte, variația factorului de concentrare a tensiunilor K_t în funcție de raportul între raza de racordare şi diametrul mic este redată în figura 6.14, pentru patru valori ale raportului diametrelor celor două porțiuni. Raze de racordare mici produc valori K_t mari, deci trebuie evitate în proiectare.

Exemplul 6.4

Un arbore este antrenat cu o putere $N = 200$ kW la o turație $n = 600$ rot/min şi transmite puterile $N_1 = 120$ kW şi respectiv $N_2 = 80$ kW unor

consumatori (fig. 6.15, *a*). Să se dimensioneze arborele din oțel cu $\tau_a = 40$ MPa şi $G = 81$ GPa. Să se calculeze rotirea relativă a secțiunii *2* față de secțiunea *0* şi să se verifice unghiul de răsucire specifică ştiind că valoarea admisibilă este $\theta_a = 0{,}018$ rad/m. Se dau $a = 0{,}15$ m şi $b = 0{,}20$ m.

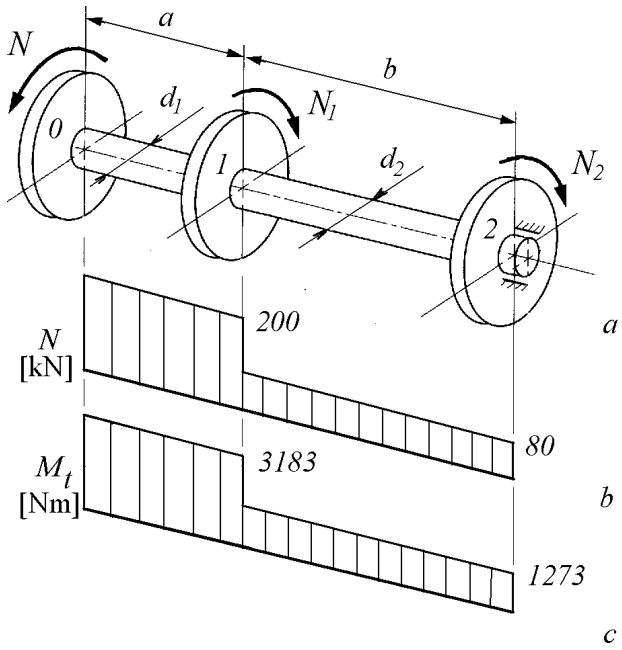


Fig. 6.15

Rezolvare

Se trasează diagrama puterilor (fig. 6.15, *b*) şi se calculează momentele de răsucire pe intervalele *0-1* şi *1-2* :

$$M_{t\,01} = 9550\frac{N_{01}}{n} = 9550\frac{200}{600} = 3183\ \text{Nm},$$

$$M_{t\,12} = 9550\frac{N_{12}}{n} = 9550\frac{80}{600} = 1273\ \text{Nm}.$$

Se poate trasa şi diagrama momentelor de răsucire (fig. 6.15, *c*).

Din relațiile (6.10,a) şi (6.12) rezultă diametrele arborelui :

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16\,M_{\text{t}\,01}}{\pi\,\tau_a}} = 10\cdot\sqrt[3]{\frac{16\cdot 3183}{\pi\,40}} = 74\ \text{mm},$$

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{16\,M_{t\,02}}{\pi\,\tau_a}} = 10\cdot\sqrt[3]{\frac{16\cdot 1273}{\pi\,40}} = 54{,}5\ \text{mm}\,.$$

Se aleg valorile $d_1 = 75$ mm şi $d_2 = 55$ mm.

Unghiul rotirii secţiunii *2* faţă de secţiunea *0* are expresia

$$\Delta\varphi_{20} = \frac{M_{t\,01}\ \ell_{01}}{G\,I_{p\,1}} + \frac{M_{t\,12}\ \ell_{12}}{G\,I_{p\,2}}\,,$$

unde : $I_{p\,1} = \dfrac{\pi\cdot 75^4}{32} = 310{,}6\cdot 10^4\ \text{mm}^4$, $I_{p\,2} = \dfrac{\pi\cdot 55^4}{32} = 89{,}84\cdot 10^4\ \text{mm}^4$.

Rezultă

$$\Delta\varphi_{20} = \frac{3183\cdot 10^3\cdot 150}{8{,}1\cdot 10^4\cdot 310{,}6\cdot 10^4} + \frac{1273\cdot 10^3\cdot 200}{8{,}1\cdot 10^4\cdot 89{,}84\cdot 10^4} = 0{,}0054\ \text{rad}\,.$$

Unghiurile de răsucire specifică pe cele două intervale, calculate cu relaţia (6.6), sunt

$$\theta_{01} = \frac{M_{t\,01}}{G\,I_{p\,1}} = \frac{3183\cdot 10^3}{8{,}1\cdot 10^4\cdot 310{,}6\cdot 10^4} = 1{,}265\cdot 10^{-5}\ \text{rad/mm} < \theta_a = 1{,}8\cdot 10^{-5}\ \text{rad/mm}\,,$$

$$\theta_{12} = \frac{M_{t\,12}}{G\,I_{p\,2}} = \frac{1273\cdot 10^3}{8{,}1\cdot 10^4\cdot 89{,}84\cdot 10^4} = 1{,}75\cdot 10^{-5}\ \text{rad/mm} < \theta_a\,.$$

Exemplul 6.5

Să se determine momentul de răsucire capabil pentru bara din figura 6.16, precum şi rotirea secţiunii *3* faţă de încastrare. Bara este din oţel cu $\tau_a = 60$ MPa şi $G = 81$ GPa, $d = 20$ mm, $b = 10$ mm, $h = 15$ mm, $a = 0{,}2$ m, $b = 0{,}1$ m.

Rezolvare

Pentru secţiunea circulară

$$W_d = W_p = \frac{\pi\,d^3}{16} = \frac{\pi\,20^3}{16} = 1{,}57\cdot 10^3\ \text{mm}^3\,,$$

iar pentru secţiunea dreptunghiulară ($\alpha = 0{,}231$ şi $\beta = 0{,}196$ pentru $h/b = 1{,}5$)

$$W_d = \alpha\,h\,b^2 = 0{,}231\cdot 15\cdot 10^2 = 0{,}3465\cdot 10^3\ \text{mm}^3\,.$$

Rezultă momentul de răsucire capabil (6.10,c)

$$M_{t_{cap}} = W_{d_{min}}\,\tau_a = 346{,}5 \cdot 60 = 20{,}79 \cdot 10^3 \text{ Nmm} = 20{,}79 \text{ Nm}.$$

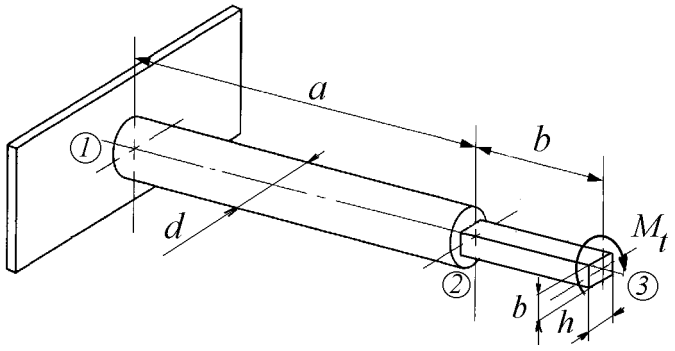


Fig. 6.16

Unghiul de rotire al secțiunii *3* față de încastrarea *1* are expresia :

$$\Delta\varphi_{31} = \frac{M_t\,\ell_{12}}{G\,I_p} + \frac{M_t\,\ell_{23}}{G\,I_d},$$

unde

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 20^4}{32} = 1{,}57 \cdot 10^4 \text{ mm}^4,$$

$$I_d = \beta\, h\, b^3 = 0{,}196 \cdot 15 \cdot 10^3 = 0{,}294 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

Rezultă

$$\Delta\varphi_{31} = \frac{20{,}79 \cdot 10^3 \cdot 200}{8{,}1 \cdot 10^4 \cdot 1{,}57 \cdot 10^4} + \frac{20{,}79 \cdot 10^3 \cdot 100}{8{,}1 \cdot 10^4 \cdot 0{,}294 \cdot 10^4} = 0{,}012 \text{ rad}.$$

Exemplul 6.6

Să se dimensioneze bara încastrată la capete din figura 6.17, *a* din oțel, cu secțiune circulară, cu $\tau_a = 50$ MPa.

Rezolvare

Ecuația de echilibru a momentelor se scrie

$$M_1 + M_2 = 150\,.$$

Sistemul este simplu static nedeterminat. Problema se va rezolva prin suprapunerea efectelor, pe baza rezultatelor de la paragraful 6.10.1.

Dacă acționează numai momentul din secțiunea *3*, condiția de deformație $\Delta\varphi_{13} = \Delta\varphi_{32}$ se scrie $\frac{M_{13}\,\ell_{13}}{G\,I_p} = \frac{M_{32}\,\ell_{32}}{G\,I_p}$, sau $M_1'\,\ell = M_2'\,3\ell$. Dar ecuația de echilibru este $M_1' + M_2' = 150$, deci $M_1' = 37{,}5$ Nm, $M_2' = 12{,}5$ Nm, valori cu care se construieşte diagrama momentelor de răsucire din figura 6.17, *b*.

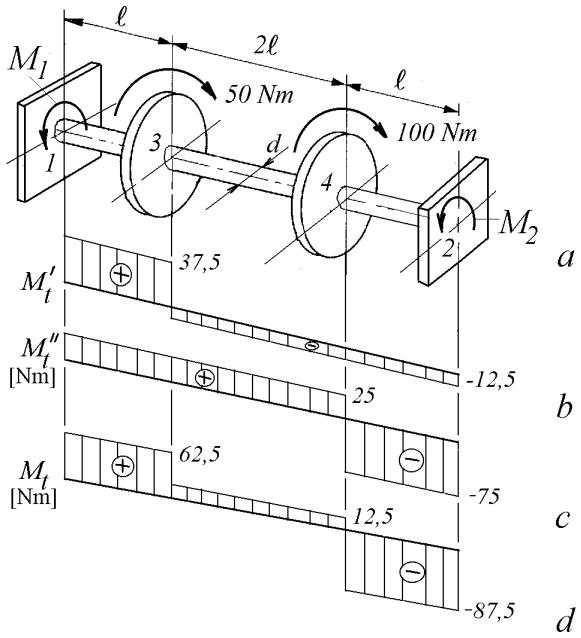


Fig. 6.17

Similar, dacă acționează numai momentul din secțiunea *4*, condiția de deformație $\Delta\varphi_{14} = \Delta\varphi_{42}$ sau $M_1''3\ell = M_2''\,\ell$ şi ecuația de echilibru $M_1'' + M_2'' = 100$ conduc la $M_1'' = 25$ Nm, $M_2'' = 75$ Nm; Diagrama corespunzătoare a momentelor de răsucire este redată în figura 6.17, *c*.

În cazul acțiunii simultane a celor două momente, diagrama momentelor de răsucire are forma din figura 6.17, *d*. Rezultă

$$\left|M_{t_{max}}\right| = 87{,}5 \text{ Nm}.$$

Se utilizează formula de dimensionare (6.10, *a*)

$$W_{p_{nec}} = \frac{\left|M_{t_{max}}\right|}{\tau_a} = \frac{87{,}5\cdot 10^3}{50} = 1750\,\text{mm}^3,$$

deci $\frac{\pi d^3}{16} = 1750$, de unde rezultă $d = 20{,}7$ mm. Se alege $d = 21$ mm.

Exemplul 6.7

Un arc cilindric elicoidal având raza de înfăşurare $R = 40$ mm şi numărul de spire $n = 8$ este comprimat de o forţă $F = 1250$ N. Să se dimensioneze arcul şi să se calculeze săgeata *f*, cunoscând $\tau_a = 500$ MPa şi $G = 85$ GPa.

Rezolvare

Se dimensionează arcul cu formula (6.34)

$$d = \sqrt[3]{\frac{16\,F\,R}{\pi\,\tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1250 \cdot 40}{\pi \cdot 500}} = 7{,}985 \text{ mm}$$

Se alege $d = 8$ mm.

Săgeata arcului are expresia (6.35)

$$f = \frac{64\,F\,R^3\,n}{G\,d^4} = \frac{64 \cdot 1250 \cdot 40^3 \cdot 8}{8{,}5 \cdot 10^4 \cdot 8^4} = 117{,}6 \text{ mm}.$$

7.
PROPRIETĂȚI ALE SUPRAFEȚELOR PLANE

La încovoiere şi răsucire, forma secțiunii barei este uneori mai importantă decât suprafața acesteia. Caracteristicile geometrice ale secțiunilor plane, independente de deplanare, care intervin în calculul tensiunilor şi deformațiilor sunt *momentele de inerție*, *momentele centrifugale* şi *modulele de rezistență*, calculate față de axe care trec prin *centrul de greutate* al suprafeței secțiunii transversale.

Este evident că noțiunile provin din mecanică, prin particularizarea relațiilor de la plăci subțiri. O suprafață plană nu are greutate, nu are inerție şi nici proprietăți centrifugale. Momentele de inerție se mai numesc *momente de ordinul doi ale suprafețelor*, momentele centrifugale se mai numesc *produse ale suprafețelor* iar centrele de greutate se numesc *centre geometrice* sau *centroide*. Se vor utiliza denumirile "improprii" aşa cum sunt definite în standardul românesc privind terminologia din Rezistența materialelor (STAS 1963-81).

Pentru simplificarea expunerii, sistemul de axe *yOz* va fi rotit 180^o față de convenția din acest curs. Axa *Oz* va fi orientată în sus iar axa *Oy* spre dreapta.

7.1 Momente statice ale suprafețelor plane

Fie suprafața plană din figura 7.1. Momentul (de ordinul întâi al) elementului de suprafață dA față de axa *Oy* este $z\,\mathrm{d}A$, deci momentul static al întregii suprafețe față de axa *Oy* este $\int_A z\mathrm{d}A$, unde A este aria suprafeței:

$$S_y = \int_A z\,\mathrm{d}A. \tag{7.1}$$

Momentul static al întregii figuri față de axa *Oz* este

$$S_z = \int_A y\,\mathrm{d}A. \tag{7.2}$$

Se alege un nou sistem de coordonate $\bar{y}G\bar{z}$, obținut prin translația axelor sistemului *yOz*. Coordonatele elementului d*A* în noul sistem de axe sunt

$$\bar{y} = y - y_G\,, \qquad \bar{z} = z - z_G\,.$$

unde y_G, z_G sunt coordonatele punctului *G* în sistemul inițial.

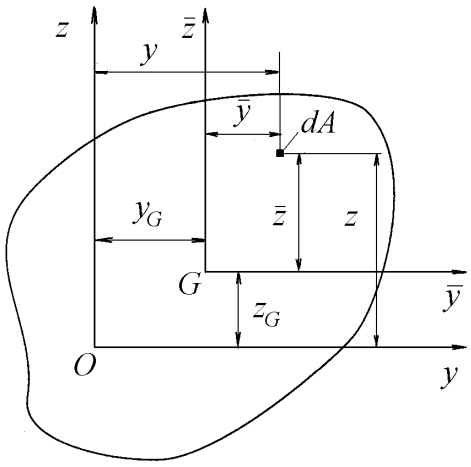


Fig. 7.1

Originea *G* a noului sistem se alege astfel încât în sistemul de coordonate $\bar{y}G\bar{z}$ momentele statice ale suprafeței să fie nule:

$$\begin{aligned} S_{\bar{y}} &= \int_A \bar{z}\,\mathrm{d}A = \int_A (z - z_G)\,\mathrm{d}A = 0, \\ S_{\bar{z}} &= \int_A \bar{y}\,\mathrm{d}A = \int_A (y - y_G)\,\mathrm{d}A = 0. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Rezultă coordonatele centrului de greutate al suprafeței

$$y_G = \frac{S_z}{A} = \frac{\int_A y\,\mathrm{d}A}{A}\,, \qquad z_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\int_A z\,\mathrm{d}A}{A}\,. \tag{7.4}$$

În practică, o suprafață este adesea împărțită în mai multe figuri cu forme geometrice simple (de ex., dreptunghiuri, cercuri, triunghiuri), ale căror suprafețe şi centre de greutate sunt cunoscute sau uşor de determinat. Coordonatele centrului de greutate al suprafeței compuse se calculează cu relațiile

$$y_G = \frac{\sum A_i\, y_i}{\sum A_i}\,, \qquad z_G = \frac{\sum A_i\, z_i}{\sum A_i}\,, \tag{7.5}$$

unde y_i şi z_i sunt coordonatele centrului de greutate al suprafeței A_i $(i = 1, 2, .., n)$.

Dacă o figură are o axă de simetrie, atunci centrul de greutate se află pe această axă, deoarece momentul static față de o axă de simetrie este zero. Dacă figura are două axe de simetrie, atunci centrul de greutate se află la intersecția acestora. Dacă o figură nu are axe de simetrie dar are un centru de simetrie, atunci centrul de greutate coincide cu centrul de simetrie.

Orice axă care trece prin centrul de greutate al suprafeței se numeşte *axă centrală.*

7.2 Momente de inerție ale suprafețelor plane

Prin definiție, *momentele de inerție axiale* sunt momente de ordinul doi ale suprafețelor

$$I_y = \int_A z^2 \, \mathrm{d}A, \qquad I_z = \int_A y^2 \, \mathrm{d}A. \tag{7.6}$$

Momentul centrifugal al suprafeței față de axele *yOz* este

$$I_{yz} = \int_A yz \, \mathrm{d}A. \tag{7.7}$$

Dacă una dintre axe este axă de simetrie, atunci momentul centrifugal al suprafeței este nul.

La suprafețe axial-simetrice, momentul de inerție polar față de punctul *O* este

$$I_p = \int_A r^2 \, \mathrm{d}A = \int_A \left(y^2 + z^2\right) \mathrm{d}A = I_z + I_y. \tag{7.8}$$

unde *r* este distanța de la elementul d*A* la originea *O*.

Momentele de inerție axiale şi cel polar sunt mărimi pozitive, în timp ce momentul centrifugal poate fi pozitiv, zero sau negativ.

Razele de inerție se definesc prin relațiile

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \qquad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}. \tag{7.9}$$

Dreptunghiul

La dreptunghiul cu baza *b* şi înălțimea *h* din figura 7.2, se consideră elementul de arie $\mathrm{d}A = b \, \mathrm{d}z$ situat la distanța *z* de axa *Oy*. Prima integrală (7.6) devine

$$I_y = \int_A z^2 \, \mathrm{d}A = \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 \, b \, \mathrm{d}z = \frac{b\,h^3}{12}. \tag{7.10}$$

Deci

$$I_y = \frac{b\,h^3}{12} \qquad \text{şi} \qquad I_z = \frac{h\,b^3}{12}. \tag{7.11}$$

Cercul

Fie cercul de rază $R = D/2$ din figura 7.3. Elementul de suprafață haşurat $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$ este situat la distanța $z = r\sin\theta$ de axa *Oy*. Rezultă

$$I_y = \int_A z^2 \, \mathrm{d}A = \int_0^{2\pi}\int_0^R (r\sin\theta)^2 \, r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Deci

$$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64}. \tag{7.12}$$

Aceeaşi expresie se poate deduce din formula momentului de inerție polar (6.7), pe baza relației (7.8), $I_y = I_z = I_p/2$.

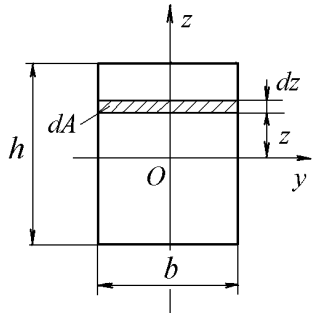


Fig. 7.2

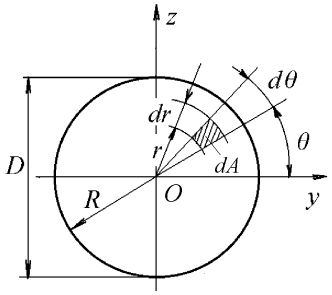


Fig. 7.3

Inelul circular

La un inel gros, cu diametrul exterior *D* şi diametrul interior *d*, momentul de inerție axial se obține scăzând momentul de inerție al cercului interior din momentul de inerție al cercului exterior

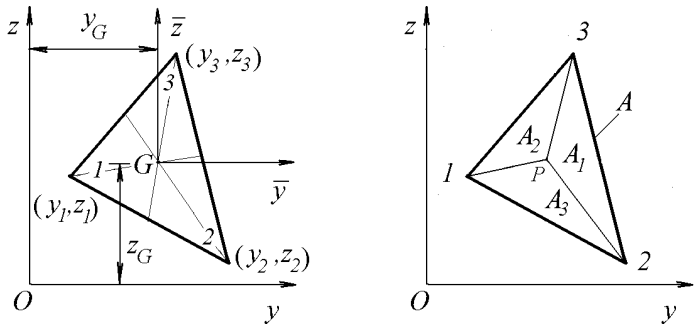
$$I_y = I_z = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{64}. \tag{7.13}$$

La un inel subţire, de rază R şi grosime $\delta << R$, se consideră un element de suprafaţă $\mathrm{d}A = R\,\mathrm{d}\theta\,\delta$ situat la distanţa $z = R\sin\theta$ de axa Oy. Rezultă

$$I_y = \int_A z^2\,\mathrm{d}A = \int_0^{2\pi} (R\sin\theta)^2\,R\,\mathrm{d}\theta\,\delta = \pi\,R^3\,\delta. \tag{7.14}$$

Triunghiul

Fie triunghiul din figura 7.4, *a*, definit prin coordonatele vârfurilor y_i, z_i $(i = 1, 2, 3)$ faţă de un sistem de axe oarecare yOz.



a b

Fig. 7.4

Coordonatele centrului de greutate sunt

$$y_G = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3), \quad z_G = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3). \tag{7.15}$$

Momentele statice faţă de sistemul de coordonate yOz au expresiile

$$S_y = A\,z_G = \frac{A}{3}(z_1 + z_2 + z_3), \qquad S_z = A\,y_G = \frac{A}{3}(y_1 + y_2 + y_3), \tag{7.16}$$

unde A este suprafaţa triunghiului

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[\, y_1 (z_2 - z_3) + y_2 (z_3 - z_1) + y_3 (z_1 - z_2) \,\right]. \tag{7.17}$$

Momentele de inerţie axiale sunt

$$I_y = \frac{A}{6}\left[\, z_1 (z_1 + z_2) + z_2 (z_2 + z_3) + z_3 (z_3 + z_1) \,\right], \tag{7.18}$$

$$I_z = \frac{A}{6}\left[\, y_1 (y_1 + y_2) + y_2 (y_2 + y_3) + y_3 (y_3 + y_1) \,\right]. \qquad (7.19)$$

Momentul centrifugal este

$$I_{yz} = \frac{A}{12}\left[\, (y_1 + y_2)(z_1 + z_2) + (y_2 + y_3)(z_2 + z_3) + (y_3 + y_1)(z_3 + z_1) \,\right] \qquad (7.20)$$

Calculul relațiilor de mai sus se poate face simplu utilizând *coordonatele triunghiulare* (fig. 7.4, *b*). Poziția unui punct *P* în interiorul sau pe conturul unui triunghi de suprafață *A* este determinată de trei rapoarte între suprafețe, numite coordonate triunghiulare

$$L_1 = A_1 / A\,, \qquad L_2 = A_2 / A\,, \qquad L_3 = A_3 / A\,. \qquad (7.21)$$

Între coordonatele carteziene *y*, *z* ale punctului *P* şi coordonatele triunghiulare L_1, L_2, L_3 se stabilesc relațiile liniare

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix}. \qquad (7.22)$$

Înlocuind coordonatele *y*, *z* în relațiile de definiție (7.6) şi (7.7) se obțin formulele (7.18)-(7.20). Se utilizează integrale de forma (Gallagher)

$$\int_A (L_1)^a (L_2)^b \, \mathrm{d}A = 2A \frac{(a)!\,(b)!}{(a+b+2)!}\,, \qquad \int_A (L_1)^a \, \mathrm{d}A = 2A \frac{(a)!}{(a+2)!}\,.$$

Momentele de inerție ale triunghiului față de axele centrale sunt

$$I_{\bar{y}} = \frac{A}{12}\left(\bar{z}_1^2 + \bar{z}_2^2 + \bar{z}_3^2\right), \quad I_{\bar{z}} = \frac{A}{12}\left(\bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2 + \bar{y}_3^2\right), \qquad (7.23)$$

$$I_{\bar{y}\bar{z}} = \frac{A}{12}\left(\bar{y}_1\bar{z}_1 + \bar{y}_2\bar{z}_2 + \bar{y}_3\bar{z}_3\right). \qquad (7.24)$$

Relațiile (7.15)-(7.20) sunt utile la calculul momentelor de inerție ale suprafețelor de forme complicate, care pot fi aproximate prin mai multe triunghiuri, de exemplu secțiunea transversală a unui burghiu sau a unei palete de turbină sau compresor.

Triunghiul dreptunghic

Fie triunghiul dreptunghic cu baza *b* şi înălțimea *h* din figura 7.5.

Din relațiile (7.18)-(7.20) se obține

$$I_y = \frac{b\,h^3}{12}\,, \qquad I_z = \frac{h\,b^3}{12}\,, \qquad I_{yz} = \frac{b^2\,h^2}{24}\,.$$

Din relaţiile (7.23) şi (7.24) se obţine

$$I_{\bar{y}} = \frac{b\,h^3}{36}, \qquad I_{\bar{z}} = \frac{h\,b^3}{36}, \qquad I_{\bar{y}\bar{z}} = -\frac{b^2\,h^2}{72}.$$

Semnul momentului centrifugal faţă de axele centrale depinde de sensul acestora în raport cu triunghiul, putând fi pozitiv pentru alte direcţii ale axelor faţă de cele din figura 7.5.

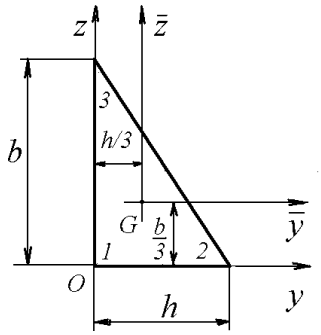


Fig. 7.5

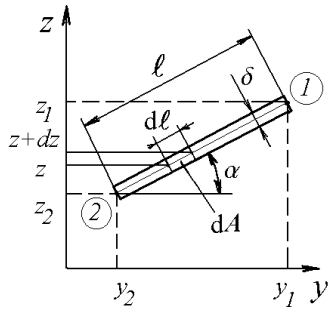


Fig. 7.6

Fâşie dreptunghiulară subţire

Pentru calculul momentelor de inerţie ale profilelor subţiri, acestea se decompun în suprafeţe dreptunghiulare înguste. În continuare se calculează momentele de inerţie la un dreptunghi a cărui grosime este mult mai mică decât lungimea.

Fie dreptunghiul din figura 7.6, definit prin grosimea δ şi coordonatele extremităţilor $y_i, z_i \ \ (i = 1, 2)$ faţă de un sistem de axe oarecare *yOz*. Se notează ℓ lungimea dreptunghiului şi α înclinarea acestuia faţă de axa *Oy*.

Elementul de lungime $\mathrm{d}\ell$ are suprafaţa

$$\mathrm{d}A = \delta\,\mathrm{d}\ell = \delta\frac{\mathrm{d}z}{\sin\alpha}.$$

Se calculează

$$I_y = \int_A z^2\,\mathrm{d}A = \frac{\delta}{\sin\alpha}\int_{z_2}^{z_1} z^2\,\mathrm{d}z = \frac{\delta}{\sin\alpha}\,\frac{z_1^3 - z_2^3}{3} = \frac{\delta\,\ell}{3}\,\frac{z_1^3 - z_2^3}{z_1 - z_2}$$

deci momentul de inerţie faţă de axa *Oy* este

$$I_y = \frac{A}{3}\left(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2\right) \tag{7.25}$$

şi analog, momentul de inerție față de axa *Oz* este

$$I_z = \frac{A}{3}\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right). \tag{7.26}$$

Din relația (7.7) se obține momentul centrifugal

$$I_{yz} = \frac{A}{6}\left[\,(y_1 + y_2)(z_1 + z_2) + y_1 z_1 + y_2 z_2\,\right] \tag{7.27}$$

7.3 Variația momentelor de inerție cu translația axelor

La calculul momentelor de inerție ale suprafețelor compuse, se cunoaşte momentul de inerție al unei suprafețe componente față de un sistem de axe local, cu originea în centrul de greutate al suprafeței respective, şi se calculează momentul de inerție față de un sistem de axe global, având axele paralele cu axele sistemului local.

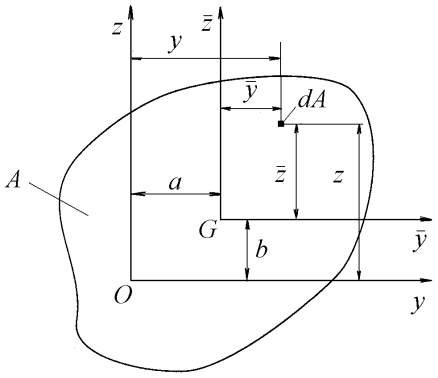


Fig. 7.7

Cu notațiile din figura 7.7, se obține

$$I_y = \int_A z^2\,\mathrm{d}A = \int_A (\bar{z} + b)^2\,\mathrm{d}A = \int_A \left(\bar{z}^2 + 2\,\bar{z}\,b + b^2\right)\mathrm{d}A = I_{\bar{y}} + b^2 A,$$

$$I_z = \int_A y^2\,\mathrm{d}A = \int_A (\bar{y} + a)^2\,\mathrm{d}A = \int_A \left(\bar{y}^2 + 2\,\bar{y}\,a + a^2\right)\mathrm{d}A = I_{\bar{z}} + a^2 A,$$

$$I_{yz} = \int_A yz\,\mathrm{d}A = \int_A (\bar{y} + a)(\bar{z} + b)\,\mathrm{d}A = \int_A \left(\bar{y}\bar{z} + a\bar{z} + \bar{y}\,b + ab\right)\mathrm{d}A = I_{\bar{y}\bar{z}} + abA.$$

Rezultă relaţiile cunoscute ca *formulele lui Steiner* sau *teorema axelor paralele:*

$$I_y = I_{\bar{y}} + A\,b^2 \ , \qquad I_z = I_{\bar{z}} + A\,a^2 \ , \tag{7.28}$$

Momentul de inerţie faţă de o axă oarecare este egal cu momentul de inerţie faţă de o axă paralelă, care trece prin centrul de greutate al suprafeţei, plus produsul ariei suprafeţei cu pătratul distanţei între cele două axe.

$$I_{yz} = I_{\bar{y}\bar{z}} + A\,a\,b \ . \tag{7.29}$$

Momentul de inerţie centrifugal faţă de două axe oarecare este egal cu momentul de inerţie centrifugal faţă de axe paralele care trec prin centrul de greutate al suprafeţei, plus produsul ariei cu distanţele între cele două axe.

Relaţiile (7.28) şi (7.29) pot fi utilizate cu condiţia ca cel puţin una dintre axe să fie axă centrală.

Exemplul 7.1

Se cere să se calculeze momentele de inerţie axiale ale suprafeţei din figura 7.8, *a* în care dimensiunile sunt date în mm.

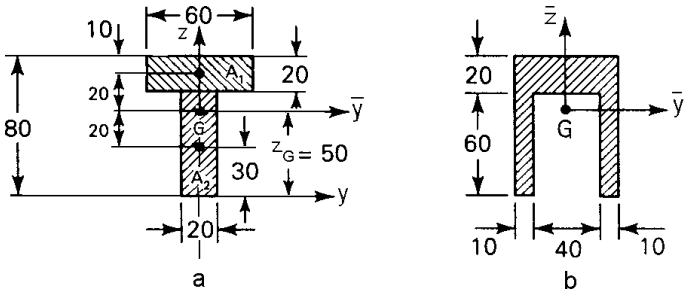


Fig. 7.8

Figura se împarte în două dreptunghiuri de arii A_1 şi A_2 la care se cunosc centrele de greutate. Se alege un sistem de axe de referinţă cu axa *y* la baza figurii şi axa *z* axa de simetrie verticală. Se calculează poziţia centrului de greutate

$$z_G = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2}{A_1 + A_2} = \frac{20 \cdot 60 \cdot 70 + 60 \cdot 20 \cdot 30}{20 \cdot 60 + 60 \cdot 20} = 50 \text{ mm} .$$

Se trasează axa $G\bar{y}$ paralelă cu *Oy*. Aplicând prima formulă (7.28) se obţine

$$I_{\bar{y}} = \frac{60 \cdot 20^3}{12} + 20 \cdot 60 \cdot 20^2 + \frac{20 \cdot 60^3}{12} + 20 \cdot 60 \cdot 20^2 = 136 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{\bar{z}} = I_z = \frac{20 \cdot 60^3}{12} + \frac{60 \cdot 20^3}{12} = 40 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 .$$

Momentul de inerție axial $I_{\bar{y}}$ al suprafeței în U din figura 7.8, *b* are aceeaşi valoare cu cel al suprafeței în T din figura 7.8, *a*.

7.4 Variația momentelor de inerție cu rotația axelor

Momentele de inerție ale unei suprafețe plane nu depind numai de alegerea originii axelor de coordonate, dar şi de orientarea axelor în planul suprafeței. La studiul încovoierii oblice a barelor este uneori necesar să se calculeze momentele de inerție față de un sistem de axe de coordonate rotit față de sistemul considerat inițial.

Fie suprafața din figura 7.9 la care se cunosc momentele de inerție față de axele *yOz*, notate I_y, I_z, I_{zy}. Interesează valorile momentelor de inerție față de un sistem de axe y_1Oz_1 rotit cu unghiul θ față de axele inițiale, momente notate $I_{y_1}, I_{z_1}, I_{y_1z_1}$.

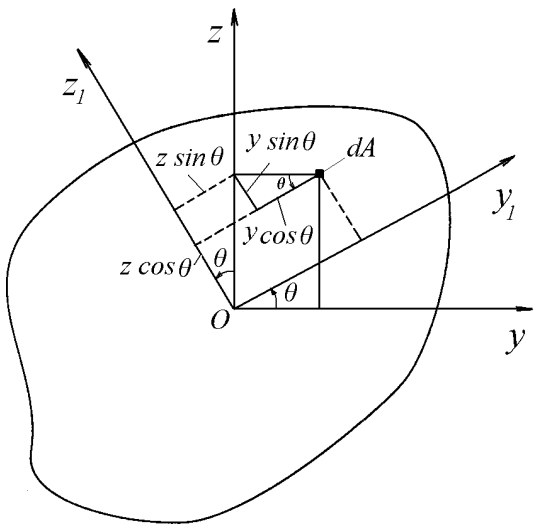


Fig. 7.9

Coordonatele elementului d*A* în sistemul de axe rotit se pot exprima în funcție de coordonatele elementului în sistemul de axe inițial:

$$y_1 = y\cos\theta + z\sin\theta , \quad z_1 = z\cos\theta - y\sin\theta . \qquad (7.30)$$

Momentele de inerţie faţă de axele rotite sunt

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= \int_A z_1^2 \,\mathrm{d}A = \int_A \left(z\cos\theta - y\sin\theta\right)^2 \mathrm{d}A = \\ &= \cos^2\theta \int_A z^2 \,\mathrm{d}A + \sin^2\theta \int_A y^2 \,\mathrm{d}A - 2\sin\theta\cos\theta \int_A yz \,\mathrm{d}A = \\ &= I_y \cos^2\theta + I_z \sin^2\theta - I_{yz}\, 2\sin\theta\cos\theta \,, \\ I_{z_1} &= \int_A y_1^2 \,\mathrm{d}A = \int_A \left(y\cos\theta + z\sin\theta\right)^2 \mathrm{d}A = \\ &= I_z \cos^2\theta + I_y \sin^2\theta + I_{yz}\, 2\sin\theta\cos\theta \,, \\ I_{y_1z_1} &= \int_A y_1 z_1 \,\mathrm{d}A = \int_A \left(y\cos\theta + z\sin\theta\right)\left(z\cos\theta - y\sin\theta\right)\mathrm{d}A = \\ &= \left(I_y - I_z\right)\sin\theta\cos\theta + I_{yz}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right). \end{aligned} \tag{7.31}$$

Relaţiile (7.31) se scriu convenabil în funcţie de unghiul dublu:

$$I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\theta - I_{yz}\sin 2\theta \,, \tag{7.32}$$

$$I_{z_1} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\theta + I_{yz}\sin 2\theta \,, \tag{7.33}$$

$$I_{z_1y_1} = \frac{I_y - I_z}{2}\sin 2\theta + I_{yz}\cos 2\theta \,. \tag{7.34}$$

Unghiul θ pentru care momentul de inerţie axial I_{y_1} dat de relaţia (7.32) are o valoare extremă se obţine din condiţia $\mathrm{d}I_{y_1}/\mathrm{d}(2\theta) = 0$. Rezultă

$$\left(I_y - I_z\right)\left(-\sin 2\theta\right) - 2\, I_{yz}\cos 2\theta = 0 \,, \tag{7.35}$$

deci unghiul care anulează derivata este dat de relaţia

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\, I_{yz}}{I_z - I_y} \tag{7.36}$$

unde, pentru simplificarea expunerii, nu s-a schimbat notaţia pentru unghiuri.

Ecuaţia (7.36) are două soluţii care diferă cu 180^o. Deci există două unghiuri θ care diferă cu 90^o şi care definesc direcţiile axelor care trec prin punctul *O* şi faţă de care momentul de inerţie axial are valori extreme. Acestea se numesc *direcţii principale* de inerţie. Dacă originea axelor este în centrul de greutate al suprafeţei, atunci acestea se numesc *axe centrale principale* de inerţie.

Comparând relaţiile (7.34) şi (7.35), se observă că unghiul θ din relaţia (7.36) corespunde rotaţiei axelor pentru care momentul centrifugal se anulează.

Deci axele principale de inerție se pot defini şi ca axele față de care momentele centrifugale sunt nule.

Înlocuind unghiurile θ din relația (7.36) în expresia (7.32) a momentului de inerție axial I_{y_1} se obțin momentele de inerție I_1 şi I_2 față de axele principale de inerție numite *momente de inerție principale*

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \,. \tag{7.37}$$

Este posibil să se stabilească expresii care sunt invariante față de rotirea axelor de coordonate

$$I_{y_1} + I_{z_1} = I_y + I_z = I_1 + I_2 \,, \tag{7.38}$$

$$I_{y_1} I_{z_1} - I_{y_1 z_1}^2 = I_y I_z - I_{yz}^2 = I_1 I_2 \,. \tag{7.39}$$

De asemenea, uneori este util să se exprime momentele de inerție, calculate față de axe oarecare, în funcție de momentele de inerție principale

$$I_y = I_1 \cos^2\theta + I_2 \sin^2\theta \;, \tag{7.40}$$

$$I_z = I_1 \sin^2\theta + I_2 \cos^2\theta \;, \tag{7.41}$$

$$I_{yz} = \frac{I_2 - I_1}{2} \sin 2\theta \;. \tag{7.42}$$

Dacă $I_{yz} = 0$ şi $I_y = I_z$, atunci $I_{y_1} = I_{z_1} = I_y = I_z$ şi orice axă este o axă principală de inerție. Acesta este cazul suprafețelor axial-simetrice şi al celor închise de poligoane regulate.

Exemplul 7.2

Se cere să se calculeze momentele de inerție față de axele centrale principale ale suprafeței din figura 7.10, în care dimensiunile sunt date în mm.

Rezolvare

Figura se împarte în două dreptunghiuri de arii A_1 şi A_2 la care se cunosc centrele de greutate G_1 şi G_2. Se alege un sistem de axe de referință, cu axa *Oy* la marginea de sus a figurii şi axa *Oz* la marginea din stânga. Se calculează poziția centrului de greutate

$$y_G = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{40 \cdot 5 \cdot 20 + 55 \cdot 5 \cdot 2{,}5}{40 \cdot 5 + 55 \cdot 5} = 9{,}87 \text{ mm} \,,$$

$$z_G = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2}{A_1 + A_2} = \frac{40 \cdot 5 \cdot (-2{,}5) + 55 \cdot 5 \cdot (-32{,}5)}{40 \cdot 5 + 55 \cdot 5} = -19{,}87 \text{ mm}.$$

Se desenează axa $G\bar{y}$ paralelă cu *Oy* şi axa $G\bar{z}$ paralelă cu *Oz*. Aplicând formulele (7.28) se obțin momentele de inerție axiale

$$I_{\bar{y}} = \frac{40 \cdot 5^3}{12} + 40 \cdot 5 \cdot (19{,}87 - 2{,}5)^2 + \frac{5 \cdot 55^3}{12} + 55 \cdot 5 \cdot (32{,}5 - 19{,}87)^2 = 17{,}395 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{\bar{z}} = \frac{5 \cdot 40^3}{12} + 40 \cdot 5 \cdot (20 - 9{,}87)^2 + \frac{55 \cdot 5^3}{12} + 55 \cdot 5 \cdot (9{,}87 - 2{,}5)^2 = 6{,}27 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

Din formula (7.29) se determină momentul centrifugal

$$I_{\bar{y}\bar{z}} = 40 \cdot 5 \cdot 10{,}13 \cdot 17{,}37 + 55 \cdot 5 \cdot (-7{,}37) \cdot (-12{,}63) = 6{,}079 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

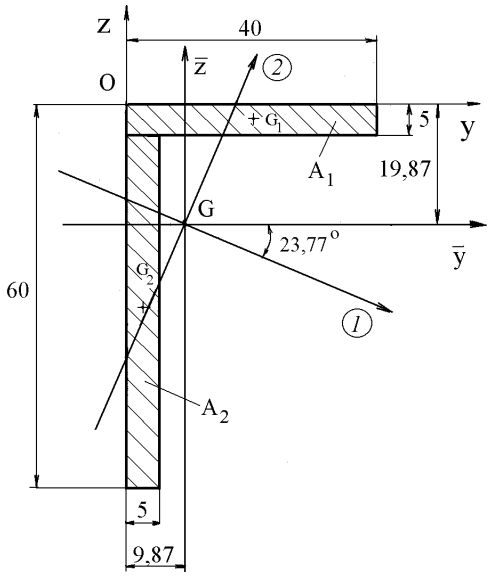


Fig. 7.10

Din relația (7.37) se calculează momentele de inerție principale

$$I_{1,2} = \frac{17{,}395 + 6{,}27}{2} \cdot 10^4 \pm \frac{1}{2}\sqrt{(17{,}395 - 6{,}27)^2 + 4 \cdot 6{,}079^2} \cdot 10^4 = (118{,}325 \pm 82{,}4) \cdot 10^4$$

sau

$$I_1 = 20{,}072 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \text{ şi } I_2 = 3{,}59 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

Din relația (7.36) se obține

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \cdot 6{,}079}{6{,}27 - 17{,}395} = -1{,}093$$

deci $2\theta = -47{,}54^{\circ}$ şi $132{,}46^{\circ}$. Rezultă unghiurile care definesc direcțiile principale de inerție, $\theta_1 = -23{,}77^{\circ}$ şi $\theta_2 = 66{,}23^{\circ}$.

În figura 7.10 s-au trasat axele centrale principale, notate *1*, respectiv *2*. Se vede că elementele suprafeței sunt cel mai îndepărtate față de axa *1*, şi cel mai apropiate față de axa *2*.

Exemplul 7.3

Se cere să se calculeze momentele de inerție față de axele centrale principale la secțiunea din figura 7.11.

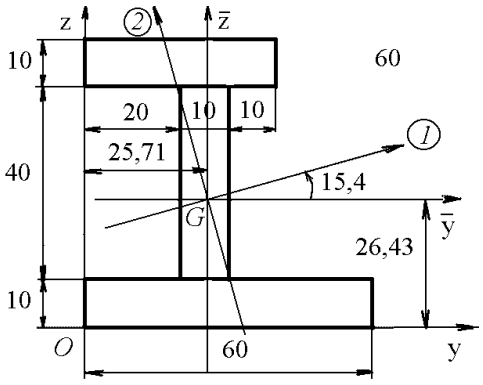


Fig. 7.11

Rezolvare

Suprafața secțiunii: $A = 1400$ mm^2.

Coordonatele centrului de greutate: $y_G = 25{,}71$ mm, $z_G = 26{,}43$ mm.

Momentele de inerție față de sistemul *yOz* sunt

$$I_y = 164{,}66 \cdot 10^4 \text{ mm}^4, \quad I_z = 118{,}64 \cdot 10^4 \text{ mm}^4, \quad I_{yz} = 83 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

Momentele de inerție față de axele centrale $\bar{y}G\bar{z}$ sunt

$$I_{\bar{y}} = 66{,}88 \cdot 10^4 \text{ mm}^4, \quad I_{\bar{z}} = 26{,}09 \cdot 10^4 \text{ mm}^4, \quad I_{\bar{y}\bar{z}} = -12{,}14 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

Direcțiile axelor centrale principale sunt definite de unghiurile

$$\theta_1 = 15{,}39^{\circ}, \ \theta_2 = 105{,}39^{\circ}.$$

Momentele de inerţie centrale principale au valorile

$$I_1 = 70{,}22 \cdot 10^4 \text{ mm}^4, \quad I_2 = 22{,}75 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

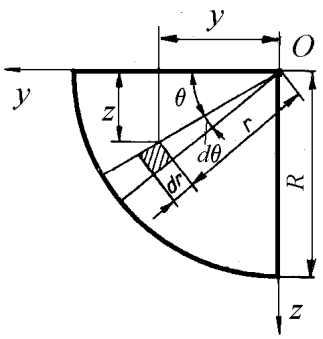


Fig. 7.12

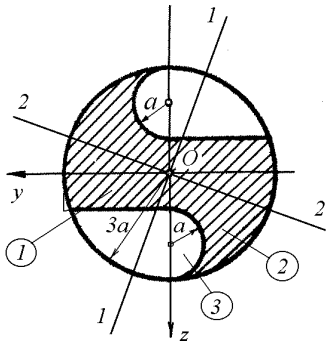


Fig. 7.13

Exemplul 7.4

Să se determine poziţia centrului de greutate şi momentele de inerţie faţă de axele sistemului de referinţă *yOz* pentru suprafaţa sfert de cerc din figura 7.12.

Rezolvare

Momentul static faţă de axa *Oy* (7.2) este

$$S_y = \int_A z \, \mathrm{d}A = \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin\theta \, \mathrm{d}r \, r \mathrm{d}\theta = \int_0^R r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{R^3}{3}.$$

Coordonatele centrului de greutate (7.4) sunt

$$z_G = \frac{S_y}{A} = \frac{R^3/3}{\pi R^2/4} = \frac{4R}{3\pi} = y_G.$$

Momentul de inerţie faţă de axa *Oy* (7.6) este

$$I_y = \int_A z^2 \, \mathrm{d}A = \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin^2\theta \, \mathrm{d}r \, r \mathrm{d}\theta = \int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi R^4}{16}.$$

Momentul centrifugal (7.7) este

$$I_{yz} = \int_A y z \, \mathrm{d}A = \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta \, r\sin\theta \, \mathrm{d}r \, r \mathrm{d}\theta = \int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{R^4}{8}.$$

Exemplul 7.5

Secțiunea transversală a unui burghiu are forma aproximativă din figura 7.13. Se cere să se calculeze momentele de inerție centrale principale şi poziția axelor centrale principale de inerție.

Rezolvare

Se consideră că jumătatea inferioară a secțiunii se compune din dreptunghiul *1* şi sfertul de cerc *2* din care se decupează semicercul *3*.

Momentele de inerție axiale se calculează pe baza expresiilor stabilite pentru dreptunghi (7.11), cerc (7.12) şi sfert de cerc (Exemplul 7.4), utilizând formulele lui Steiner (7.28). Se obține

$$I_y = 2\left[\frac{3a\,a^3}{12} + 3a\,a\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{16}(3a)^4 - \frac{\pi}{8}a^4 - \frac{\pi a^2}{2}(2a)^2\right] = 20{,}457\ a^4,$$

$$I_z = 2\left[\frac{a\,(3a)^3}{12} + a\,3a\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{16}(3a)^4 - \frac{\pi}{8}a^4\right] = 49{,}023\ a^4.$$

Momentul centrifugal este

$$I_{yz} = 2\left[3a^2\frac{a}{2}\frac{3a}{2} - \frac{1}{8}(3a)^4 + \left(-\frac{\pi a^2}{2}\right)\left(-\frac{4a}{3\pi}\right)2a\right] = -13{,}08\ a^4$$

Momentele de inerție principale (7.37) sunt

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} =$$

$$= \frac{20{,}457 + 49{,}023}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{20{,}457 - 49{,}023}{2}\right)^2 + (-13{,}08)^2}\ .$$

$$I_1 = 54{,}1\ a^4, \qquad I_2 = 15{,}37\ a^4.$$

Direcțiile principale de inerție (7.36) se obțin din relația

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\,I_{yz}}{I_z - I_y} = \frac{2\cdot(-13{,}08)}{49{,}023 - 20{,}457} = -0{,}9158$$

de unde rezultă

$$\theta_1 = 69{,}75^0 \text{ şi } \theta_2 = -21{,}24^0\ .$$

8.
ÎNCOVOIEREA BARELOR

O bară este solicitată la *încovoiere* dacă în secţiunea transversală acţionează un moment al cărui vector este perpendicular pe axa barei. Deobicei încovoierea este rezultatul acţiunii unor sarcini transversale asupra unor bare relativ zvelte, cum sunt grinzile de susţinere a planşeelor, grinzile podurilor, osiile vagoanelor, paletele turbinelor şi compresoarelor axiale, arcurile în foi şi chiar aripile unor avioane. Aceste sarcini produc în secţiunea transversală atât moment încovoietor cât şi forţă tăietoare. Momentele încovoietoare produc tensiuni normale distribuite liniar pe înălţimea secţiunii barei, rezultat direct al ipotezei secţiunii plane. În aceste condiţii forma secţiunii barei este mai importantă decât aria suprafeţei, forme optime fiind obţinute cu ajutorul profilelor subţiri. Forţele tăietoare produc tensiuni tangenţiale nule la extremităţi şi maxime la centrul secţiunii. Calculul acestora este important la profilele subţiri şi la organele de asamblare ale grinzilor compuse.

Dacă acţionează numai un moment încovoietor se spune că bara este solicitată la *încovoiere pură*. Dacă forţele care acţionează asupra barei sunt cuprinse într-un plan de simetrie al secţiunii transversale, atunci bara este solicitată la *încovoiere simetrică*. Dacă vectorul moment este dirijat în lungul unei axe centrale de inerţie a secţiunii care însă nu este şi axă principală, atunci se spune că bara este solicitată la *încovoiere oblică*. În multe cazuri încovoierea apare simultan cu răsucirea. În acest capitol se studiază numai încovoierea.

8.1 Tensiuni la încovoierea pură simetrică

Determinarea distribuţiei tensiunilor la încovoierea pură este o problemă static nedeterminată la rezolvarea căreia se utilizează condiţii de deformaţie, relaţii între tensiuni şi deformaţii specifice, şi condiţii de echilibru.

Se fac următoarele ipoteze: a) barele au secţiune constantă; b) momentul încovoietor este constant în lungul barei, având vectorul dirijat perpendicular pe un plan de simetrie al barei; c) secţiunile transversale plane, înainte de încovoierea

barei, rămân plane după încovoiere şi perpendiculare pe axa deformată a barei; d) raza de curbură a barei deformate este mare în comparație cu dimensiunile transversale; e) elemente longitudinale ale barei sunt solicitate doar la întindere sau compresiune, nu există tensiuni transversale; f) modulul de elasticitate longitudinal al materialului barei are aceeaşi valoare la întindere şi la compresiune.

8.1.1 Deplasări şi deformații specifice

Deformații longitudinale

Se consideră o porțiune de lungime dx dintr-o bară solicitată la încovoiere pură în planul xOz (fig. 8.1, *a*). În urma aplicării momentelor încovoietoare M_y, bara se deformează ca în figura 8.1, *b*, cele două secțiuni situate inițial la distanța dx rotindu-se relativ cu unghiul $\mathrm{d}\varphi$, dar rămânând plane, conform ipotezei lui Bernoulli.

Se observă că partea de jos a barei este întinsă, în timp ce partea superioară este comprimată. Înseamnă că trebuie să existe un plan intermediar xOy în care deformația longitudinală este zero. Acesta se numeşte *plan neutru* iar axa Ox din acest plan se numeşte *axa neutră* a barei.

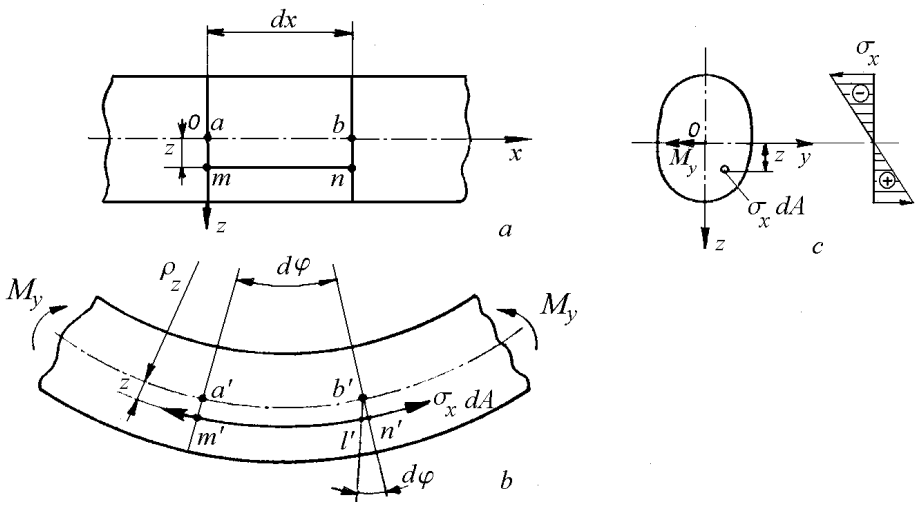


Fig. 8.1

Dacă bara ar fi formată din fibre longitudinale, atunci s-ar observa că, în urma încovoierii barei, fibrele inferioare se întind, iar cele superioare se comprimă.

Fibra care nu se alungeşte prin deformaţia de încovoiere este $a'b' = ab$ şi se numeşte *fibra medie* a barei. Fie ρ_z raza de curbură a fibrei medii.

O fibră situată la distanţa z de fibra medie are iniţial lungimea

$$mn = \mathrm{d}x = a'b' = \rho_z \, \mathrm{d}\varphi$$

iar după aplicarea solicitării devine

$$m'n' = (z + \rho_z)\mathrm{d}\varphi \, .$$

Alungirea acestei fibre este

$$\Delta(\mathrm{d}x) = l'n' = m'n' - m'l' = m'n' - a'b' = z \, \mathrm{d}\varphi \, .$$

Alungirea specifică se obţine împărţind alungirea la lungimea iniţială

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta(\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x} = \frac{z \, \mathrm{d}\varphi}{\rho_z \, \mathrm{d}\varphi} = z \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{z}{\rho_z} \, . \tag{8.1}$$

Dacă se notează curbura fibrei medii deformate

$$\kappa_y = \frac{1}{\rho_z} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \, , \tag{8.2}$$

relaţia (8.1) se mai scrie

$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x} = z \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \kappa_y \, z \, . \tag{8.3}$$

unde

$$u_x = z \, \varphi \tag{8.4}$$

este deplasarea longitudinală a unui punct situat la distanţa z de planul neutru.

Ca o consecinţă directă a ipotezei secţiunii plane, *alungirile specifice sunt distribuite liniar pe înălţimea secţiunii*, fiind nule în planul neutru şi având valori maxime în fibrele extreme. Relaţia (8.1) este independentă de tipul materialului barei, fiind valabilă şi la materiale cu dependenţă neliniară între tensiuni şi deformaţii specifice, sau la solicitări în domeniul plastic.

Deformaţii transversale.

Studiul încovoierii se bazează şi pe ipoteza invariabilităţii secţiunii transversale a barei. În realitate, alungirile în lungul barei sunt însoţite de contracţii transversale $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \, \varepsilon_x$ (4.9). În zona întinsă grosimea barei scade, în zona comprimată grosimea barei creşte, iar suprafaţa neutră se curbează, fenomen denumit *curbură anticlastică*. Aceste deformaţii sunt foarte mici şi nu modifică rezultatele obţinute pentru alungirile specifice longitudinale.

8.1.2 Relația între tensiuni şi deformații specifice

Aplicând legea lui Hooke (3.22) rezultă

$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x = \frac{E}{\rho_z}\,z = \kappa_y\,E\,z\,, \tag{8.5}$$

relație valabilă numai pentru materiale liniar-elastice. *Tensiunile normale de încovoiere variază liniar cu distanța la fibra medie* (fig. 8.1, *c*) fiind maxime în fibrele extreme, unde distanța z este maximă. În planul neutru, deci, pentru o secțiune dată, în lungul axei neutre, tensiunile produse de încovoiere sunt nule. De asemenea, conform ipotezelor de lucru, $\sigma_y = \sigma_z = 0$.

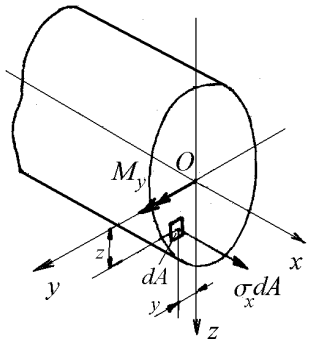


Fig. 8.2

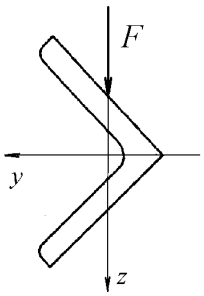


Fig. 8.3

8.1.3 Condiții de echilibru

Tensiunile σ_x produc forțe interioare $\sigma_x\,\mathrm{d}A$ care echilibrează momentul încovoietor M_y. Dacă se scriu relațiile de echivalență (3.4) între tensiunile σ_x şi eforturile secționale (fig. 8.2), se obține

$$N = \int_A \sigma_x\,\mathrm{d}A = 0\,, \tag{8.6}$$

$$M_{iy} = \int_A z\,\sigma_x\,\mathrm{d}A = M_y\,, \tag{8.7}$$

$$M_{iz} = -\int_A y\,\sigma_x\,\mathrm{d}A = 0\,. \tag{8.8}$$

În relațiile (8.6)-(8.8) s-a ținut cont de faptul că, fiind paralele cu axa *Ox*, forțele $\sigma_x\,\mathrm{d}A$ pot produce în general forță axială şi momente încovoietoare, dar dintre acestea există numai momentul dirijat în lungul axei *Oy*.

Poziția axei neutre Oy.

Înlocuind relația (8.5) în (8.6) se obține $\kappa_y E \int_A z \, \mathrm{d}A = 0$ sau $\int_A z \, \mathrm{d}A = 0$. Momentul static al suprafeței secțiunii transversale (7.1) față de axa *Oy* este nul, deci axa *Oy* trebuie să fie axă centrală.

Rezultă că *axa neutră Oy trece prin centrul de greutate al secțiunii transversale a barei.*

Axa Oz

Înlocuind relația (8.5) în (8.8) se obține $\kappa_y E \int_A yz \, \mathrm{d}A = 0$ sau $\int_A yz \, \mathrm{d}A = 0$. Rezultă că momentul centrifugal al suprafeței secțiunii transversale trebuie să fie nul, $I_{yz} = 0$, deci axele sistemului *yOz* trebuie să fie *axe centrale principale*.

În cazul încovoierii simetrice această condiție este automat îndeplinită. Când secțiunea barei nu este simetrică, planul forțelor trebuie să conțină o axă centrală principală (fig. 8.3).

8.1.4 Formula lui Navier

Înlocuind relația (8.5) în (8.7) se obține $\kappa_y E \int_A z^2 \, \mathrm{d}A = M_y$ sau $\kappa_y E I_y = M_y$. Rezultă curbura barei

$$\kappa_y = \frac{1}{\rho_z} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{M_y}{E I_y}. \tag{8.9}$$

Din relația (8.5) rezultă formula tensiunilor normale la încovoiere simetrică

$$\boxed{\sigma_x = \frac{M_y \, z}{I_y}} \tag{8.10}$$

cunoscută ca *formula lui Navier*.

Tensiunile de încovoiere sunt proporționale cu momentul încovoietor şi cu distanța la axa neutră, şi invers proporționale cu momentul de inerție axial al secțiunii transversale.

La o secțiune cu două axe de simetrie (fig. 8.4, *a*) tensiunile au valori maxime egale (şi de semn contrar) în fibrele extreme. La o secțiune cu o singură

axă de simetrie (fig. 8.4, *b*) tensiunea maximă σ_{max} apare în fibra cea mai îndepărtată de axa neutră. Această valoare nu trebuie să depăşească rezistența admisibilă la încovoiere pentru materialul barei.

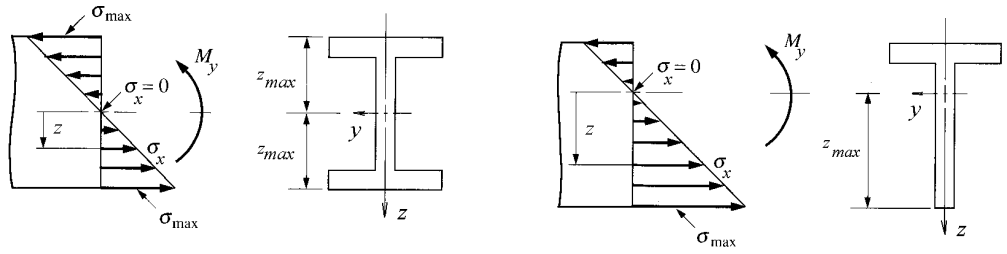


Fig. 8.4

Dacă materialul are rezistența admisibilă la întindere diferită de cea la compresiune, este importantă orientarea secțiunii astfel încât tensiunea maximă să apară pe partea cu rezistența admisibilă mai mare.

8.1.5 Modulul de rezistență axial

Tensiunea normală maximă are expresia

$$|\sigma_{max}| = \frac{M_y |z_{max}|}{I_y} = \frac{M_y}{\frac{I_y}{|z_{max}|}} = \frac{M_y}{W_y} \tag{8.11}$$

unde

$$W_y = \frac{I_y}{|z_{max}|} \tag{8.12}$$

este *modulul de rezistență axial* sau *modulul de rezistență la încovoiere* al secțiunii transversale.

La secțiunea circulară plină, cu diametrul *D,* se obține

$$W_y = \frac{I_y}{\frac{D}{2}} = \frac{\frac{\pi D^4}{64}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{32}. \tag{8.13, a}$$

La secțiunea inelară circulară, cu diametrul exterior D şi cel interior d, rezultă

$$W_y = \frac{I_y}{\frac{D}{2}} = \frac{\frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{64}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{32\,D}. \qquad (8.13, b)$$

La secțiunea dreptunghiulară, cu baza b şi înălțimea h, se calculează

$$W_y = \frac{I_y}{\frac{h}{2}} = \frac{\frac{b\,h^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{b\,h^2}{6}. \qquad (8.13, c)$$

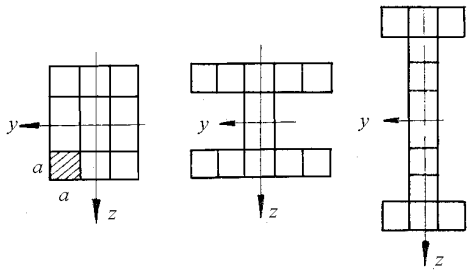
Relația (8.11) este utilizată sub următoarele forme:

- formula de dimensionare la încovoiere: $W_{y_{nec}} = \frac{M}{\sigma_a};$ (8.14, *a*)

- formula de verificare: $\sigma_{ef} = \frac{M}{W_y} \le \sigma_a;$ (8.14, *b*)

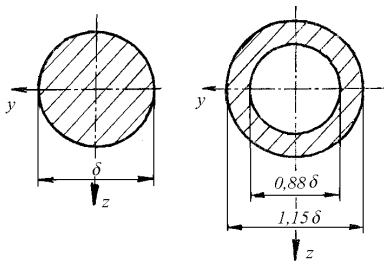
- formula momentului încovoietor capabil: $M_{cap} = W_y\,\sigma_a$. (8.14, *c*)

În relațiile (8.14), σ_a este rezistența admisibilă la încovoiere, iar M este momentul încovoietor maxim din bară, în valoare absolută. Pentru configurații sau încărcări mai complicate, acesta se obține din diagrama momentelor încovoietoare.



a *b* *c*

Fig. 8.5



a *b*

Fig. 8.6

O grindă rezistă cu atât mai bine la încovoiere cu cât W_y are valori mai mari. Forma secțiunii transversale este cu atât mai rațională cu cât W_y este mai mare pentru un consum de material cât mai mic, deci pentru o valoare cât mai mică a ariei A a suprafeței secțiunii transversale.

În figura 8.5 se arată trei secțiuni cu arii egale (12 pătrate cu latura *a*), la care prin distribuirea judicioasă a elementelor suprafeței (cât mai departe de axa *Oy*) se obține un modul de rezistență tot mai mare. Astfel

$$W_1 = 8\,a^3 \qquad \text{(fig. 8.5, } a\text{);}$$

$$W_2 = 12\,a^3 = 1{,}5\,W_1 \qquad \text{(fig. 8.5, } b\text{);}$$

$$W_3 = 23\,a^3 \cong 3\,W_1 \qquad \text{(fig. 8.5, } c\text{).}$$

La secțiunea în I, tălpile preiau cea mai mare parte a solicitării de încovoiere, inima având rolul de a menține tălpile în poziție şi de a prelua solicitările de forfecare care apar la încovoierea cu forță tăietoare. Se apreciază că la profilele utilizate în construcții metalice tălpile preiau până la 80% din momentul încovoietor din secțiune. La unele bare, pentru micşorarea greutății, se prevăd găuri transversale, din loc în loc, în lungul fibrei medii, deci în zona unde tensiunile normale sunt foarte mici.

În figura 8.6 se arată două secțiuni cu acelaşi modul de rezistență W_y. Secțiunea inelară (fig. 8.6, *b*), cu suprafața mai judicios distribuită (tensiunile de încovoiere cresc liniar de la centru spre suprafața barei), are aria egală cu 0,55 din aria suprafeței secțiunii circulare pline (fig. 8.6, *a*).

În acelaşi scop, în construcții metalice se utilizează profile laminate în formă de I, U sau L (*Anexele 2, a, b, c, d*).

8.1.6 Deformații la încovoierea pură simetrică

Deoarece pe porțiunile de bară solicitate la încovoiere pură $M_y = \text{const.}$, din relația (8.9) rezultă că, în cazul barelor de secțiune constantă şi din acelaşi material, se obține

$$\frac{1}{\rho_z} = \frac{M_y}{EI_y} = \text{const.}, \qquad (8.15)$$

Deci la încovoierea pură $\rho_z = \text{const.}$, bara se deformează în formă de arc de cerc.

În relația (8.15) produsul EI_y se numeşte *modùl de rigiditate la încovoiere*. Acesta este util în special la studiul barelor de secțiune eterogenă, deci la bare din mai multe materiale.

8.1.7 Energia de deformație la încovoierea pură

Pentru un element de bară de lungime dx, solicitat la încovoiere de momentul M_y, rotirea relativă a secțiunilor de la capete este (8.9)

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{M_y\,\mathrm{d}x}{EI_y}.$$

Lucrul mecanic efectuat de cuplul M_y pe rotirea elastică $\mathrm{d}\varphi$ se înmagazinează în elementul de bară sub formă de energie potențială de deformație

$$dU = \frac{1}{2}M_y\,\mathrm{d}\varphi = \frac{M_y^2\,\mathrm{d}x}{2EI_y}.$$

Energia acumulată de întreaga bară are expresia

$$U = \int_{\ell} \frac{M_y^2\,\mathrm{d}x}{2EI_y}. \tag{8.16}$$

Același rezultat se obține dacă în expresia $U = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E}\mathrm{d}V$ se înlocuiește σ_x din formula (8.10) și $\mathrm{d}V = \mathrm{d}A\,\mathrm{d}x$, folosind definiția (7.6) a momentului de inerție axial.

8.2 Tensiuni la încovoierea oblică

Încovoierea oblică pură este solicitarea produsă în secțiunea transversală a unei bare de un moment al cărui vector nu este dirijat în lungul unei axe centrale principale de inerție și care este constant în lungul barei. În continuare se vor considera componentele M_y și M_z ale acestui moment încovoietor, în lungul axelor *Oy*, respectiv *Oz*, care trec prin centrul de greutate *O* al suprafeței secțiunii transversale, dar nu sunt axe principale de inerție. Pentru simplificarea expunerii, se renunță la notația cu bară deasupra literelor utilizată în capitolul 7.

8.2.1 Calculul față de axe centrale oarecare

Se fac următoarele ipoteze: a) barele au secțiune constantă; b) momentul încovoietor este constant în lungul barei, având vectorul dirijat perpendicular pe axa longitudinală a barei; c) secțiunile transversale plane, înainte de încovoierea

barei, rămân plane după încovoiere şi perpendiculare pe axa deformată a barei; d) razele de curbură ale barei deformate sunt mari în comparație cu dimensiunile transversale; e) elemente longitudinale ale barei sunt solicitate doar la întindere sau compresiune, nu există tensiuni transversale; f) modulul de elasticitate longitudinal al materialului barei are aceeaşi valoare la întindere şi la compresiune.

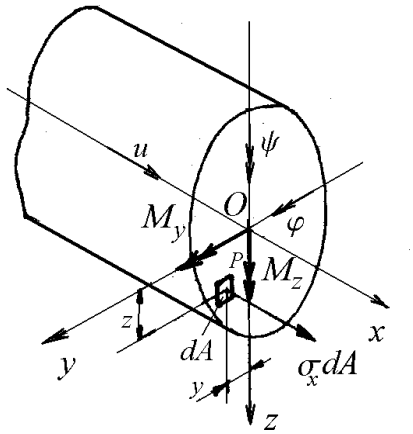


Fig. 8.7

Relații între deplasări şi deformații specifice

Ca o consecință directă a ipotezei secțiunii plane, deplasarea longitudinală a unui punct *P* de coordonate *y*, *z,* are forma generală

$$u_x = u + z\,\varphi - y\,\psi \tag{8.17}$$

unde *u* este o deplasare de translație în lungul axei *Ox*, φ este unghiul de rotație al secțiunii față de axa *Oy* şi ψ este unghiul de rotație față de axa *Oz*.

Alungirea specifică este

$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x} = \varepsilon + \kappa_y\, z - \kappa_z\, y\,. \tag{8.18}$$

unde

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \qquad \kappa_y = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}, \qquad \kappa_z = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}. \tag{8.19}$$

În relațiile (8.19), κ_y şi κ_z sunt curburile fibrei medii a barei în planele *xOz*, respectiv *xOy*. Indicii corespund axelor față de care au loc rotirile respective.

Relaţia între tensiuni şi deformaţii specifice

Aplicând legea lui Hooke (3.22) rezultă

$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x = E\,\left(\varepsilon + \kappa_y\, z - \kappa_z\, y\right), \tag{8.20}$$

relaţie valabilă numai pentru materiale liniar-elastice. *Tensiunile normale de încovoiere variază liniar cu distanţele la axele de coordonate*.

Condiţii de echilibru

Distribuţia de tensiuni este echivalentă static cu momentul încovoietor din secţiune, forţa axială fiind zero. Din relaţiile de echivalenţă (3.4) între tensiunile σ_x şi eforturile secţionale, se obţine

$$N = \int_A \sigma_x \,\mathrm{d}A = 0\,, \tag{8.21}$$

$$M_{iy} = \int_A z\,\sigma_x \,\mathrm{d}A = M_y\,, \tag{8.22}$$

$$M_{iz} = -\int_A y\,\sigma_x \,\mathrm{d}A = M_z\,. \tag{8.23}$$

Înlocuind expresia (8.20) în relaţia (8.21) se obţine

$$\varepsilon\, E \int_A \mathrm{d}A + \kappa_y\, E \int_A z\,\mathrm{d}A - \kappa_z\, E \int_A y\,\mathrm{d}A = 0\,.$$

Deoarece axele de coordonate sunt axe centrale, momentele statice sunt nule şi rezultă $\varepsilon = 0$, căci forţa axială este nulă., deci relaţia (8.20) devine

$$\sigma_x = \kappa_y\, E\, z - \kappa_z\, E\, y\,. \tag{8.24}$$

Înlocuind expresia (8.24) în relaţiile (8.22) şi (8.23), se obţine

$$\kappa_y\, E \int_A z^2\,\mathrm{d}A - \kappa_z\, E \int_A y\,z\,\mathrm{d}A = M_y\,, \tag{8.25}$$

$$\kappa_y\, E \int_A y\,z\,\mathrm{d}A - \kappa_z\, E \int_A y^2\,\mathrm{d}A = -M_z\,. \tag{8.26}$$

sau, pe baza relaţiilor de definiţie ale momentelor de inerţie (7.6) şi (7.7),

$$\kappa_y\, I_y - \kappa_z\, I_{yz} = \frac{M_y}{E}\,, \tag{8.25, *a*}$$

$$\kappa_y\, I_{yz} - \kappa_z\, I_z = -\frac{M_z}{E}\,, \tag{8.26, *b*}$$

de unde rezultă curburile

$$\kappa_y = \frac{1}{E}\frac{I_z M_y + I_{yz} M_z}{I_y I_z - I_{yz}^2}, \qquad \kappa_z = \frac{1}{E}\frac{I_{yz} M_y + I_y M_z}{I_y I_z - I_{yz}^2}. \tag{8.27}$$

Înlocuind expresiile (8.27) în relația (8.24) se obține formula tensiunilor normale la încovoierea oblică, față de axe centrale principale

$$\sigma_x = -\frac{I_{yz} M_y + I_y M_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} y + \frac{I_z M_y + I_{yz} M_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} z. \tag{8.28}$$

Axa neutră este linia din planul secțiunii transversale în lungul căreia tensiunile σ_x sunt nule. Această axă se află la intersecția planului secțiunii transversale cu planul neutru, care trece prin centrul de greutate al secțiunii. Egalând expresia (8.28) cu zero rezultă că axa neutră este o linie dreaptă, de ecuație

$$z = \frac{I_{yz} M_y + I_y M_z}{I_z M_y + I_{yz} M_z} y. \tag{8.29}$$

Planul care conține fibra medie deformată a barei este perpendicular pe axa neutră. El nu coincide cu planul forțelor, care este perpendicular pe vectorul moment, de componente M_y şi M_z. De aici denumirea de *încovoiere oblică*.

Dacă $M_z = 0$, ecuația (8.28) se reduce la

$$\boxed{\sigma_x = M_y \frac{I_z z - I_{yz} y}{I_y I_z - I_{yz}^2}} \tag{8.30}$$

iar ecuația axei neutre este

$$z = \frac{I_{yz}}{I_z} y. \tag{8.31}$$

Se observă că dacă $I_{yz} = 0$, ecuația (8.30) se reduce la formula lui Navier (8.10) stabilită pentru încovoierea simetrică.

8.2.2 Calculul față de axe centrale principale

Dacă se înlocuieşte $I_{yz} = 0$ în ecuația (8.28), rezultă

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z, \tag{8.32}$$

formulă valabilă atunci când axele *Oy* şi *Oz* sunt axe centrale principale. În acest caz, momentele de inerție I_y şi I_z sunt momentele de inerție principale I_1 sau I_2,

funcție de forma secțiunii. Pentru simplificare, s-a renunțat la notația cu bară deasupra literelor.

Dacă acționează un singur moment încovoietor M, al cărui vector este înclinat cu unghiul α față de axa principală Oy, atunci $M_y = M\cos\alpha$ şi $M_z = M\sin\alpha$.

Relația (8.32) devine

$$\sigma_x = -\frac{M\sin\alpha}{I_z}\,y + \frac{M\cos\alpha}{I_y}\,z\,, \tag{8.33}$$

Ecuația axei neutre se obține pentru $\sigma_x = 0$:

$$-\frac{y\sin\alpha}{I_z} + \frac{z\cos\alpha}{I_y} = 0$$

sau

$$\frac{z}{y} = \mathrm{tg}\alpha\,\frac{I_y}{I_z} = \mathrm{tg}\,\beta\,. \tag{8.34}$$

Dacă $I_y \neq I_z$, atunci $\beta \neq \alpha$, deci înclinarea axei neutre diferă de înclinarea vectorului moment, încovoierea este oblică. Dacă $I_y = I_z$ sau dacă $\alpha = 0$, atunci cele două direcții coincid, planul de încovoiere este perpendicular pe axa neutră.

Exemplul 8.1

Bara în consolă din figura 8.E1, *a*, de lungime $\ell = 1$ m, are secțiunea nesimetrică de la Exemplul 7.2 şi este solicitată de forța verticală $F = 200$ N care trece prin centrul de greutate al secțiunii din capăt. Se cere tensiunea normală maximă din bară.

Rezolvare

Momentul încovoietor este maxim în secțiunea din încastrare

$M_y = -F\,\ell = -200\cdot 10^3 = -2\cdot 10^5$ Nmm, $M_z = 0$.

Metoda 1. *Calculul față de axe centrale oarecare*

Tensiunile normale se calculează cu relația (8.30).

Centrul de greutate al secțiunii este localizat în figura 8.E1, *b*. Momentele de inerție şi momentul centrifugal calculate la Exemplul 7.2 față de axe centrale oarecare sunt $I_{\bar{y}} = 17{,}395 \cdot 10^4$ mm^4, $I_{\bar{z}} = 6{,}27 \cdot 10^4$ mm^4, $I_{\bar{y}\bar{z}} = 6{,}079 \cdot 10^4$ mm^4.

Ecuația axei neutre (8.31) se scrie

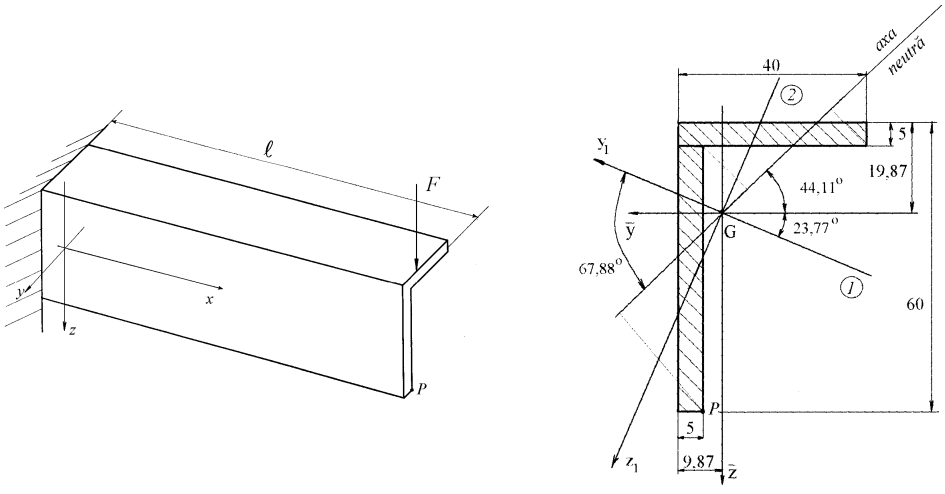
$$\bar{z} = \frac{I_{\bar{y}\bar{z}}}{I_{\bar{z}}}\,\bar{y} = \frac{6{,}079}{6{,}27}\,\bar{y} = 0{,}97\,\bar{y} = \mathrm{tg}\delta \cdot \bar{y},$$

deci axa neutră este înclinată cu unghiul $\delta = 44{,}11^0$ față de axa $G\bar{y}$. Punctul cel mai îndepărtat de această axă este punctul *P,* de coordonate $\bar{y}_P = 4{,}87$ mm, $\bar{z}_P = 40{,}13$ mm.

Din relația (8.30) se obține

$$\sigma_P = M_y \frac{I_{\bar{z}}\,\bar{z}_P - I_{\bar{y}\bar{z}}\,\bar{y}_P}{I_{\bar{y}}\,I_{\bar{z}} - I_{\bar{y}\bar{z}}^2} =$$

$$= -2 \cdot 10^5 \cdot \frac{6{,}27 \cdot 40{,}13 - 6{,}079 \cdot 4{,}87}{17{,}395 \cdot 6{,}27 - 6{,}079^2} \cdot 10^{-4} = -61{,}6 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}.$$



a b

Fig. 8.E1

Metoda 2. *Calculul față de axe centrale principale*

Tensiunile normale se calculează cu relația (8.33)

$$\sigma_x = -\frac{M_{z_1}}{I_2} y_1 + \frac{M_{y_1}}{I_1} z_1 .$$

Momentele de inerţie principale, calculate la Exemplul 7.2, sunt $I_1 = 20{,}072 \cdot 10^4$ mm^4, $I_2 = 3{,}59 \cdot 10^4$ mm^4, iar direcţiile principale fac unghiurile $\theta_1 = -23{,}77^0$ şi $\theta_2 = \theta_1 + 90^0$ cu axa $G\bar{y}$ (deci $\alpha = 23{,}77^0$).

Sistemul de axe centrale principale, notat $y_1 G z_1$, este rotit cu unghiul $\theta_1 = -23{,}77^0$ faţă de sistemul iniţial $\bar{y} G \bar{z}$.

Ecuaţia axei neutre (8.34) se scrie

$$z_1 = \frac{I_1}{I_2} \operatorname{tg}\alpha \cdot y_1 = \frac{20{,}07}{3{,}59} \operatorname{tg} 23{,}77^0 \cdot y_1 = 2{,}46\, y_1 = \operatorname{tg}\beta\, y_1 ,$$

deci axa neutră este înclinată cu unghiul $\beta = 67{,}89^0$ faţă de axa Gy_1.

Se observă că $\beta - \alpha = 67{,}88^0 - 23{,}77^0 = 44{,}11^0 = \delta$, deci rezultatul coincide cu cel obţinut prin prima metodă. Punctul cel mai îndepărtat de această axă este punctul *P,* de coordonate $\bar{y}_P = 4{,}87$ mm, $\bar{z}_P = 40{,}13$ mm.

Transformarea de coordonate (7.30) se mai scrie

$$y_1 = \bar{y}\cos\theta_1 + \bar{z}\,\sin\theta_1 = \bar{y}\cos\left(-23{,}77^0\right) + \bar{z}\,\sin\left(-23{,}77^0\right) = 0{,}915\,\bar{y} - 0{,}403\,\bar{z} ,$$

$$z_1 = \bar{z}\cos\theta_1 - \bar{y}\sin\theta_1 = \bar{z}\cos\left(-23{,}77^0\right) - \bar{y}\,\sin\left(-23{,}77^0\right) = 0{,}915\,\bar{z} + 0{,}403\,\bar{y} .$$

Coordonatele punctului *P* în sistemul de axe centrale principale sunt

$$y_{1P} = 0{,}915\,\bar{y}_P - 0{,}403\,\bar{z}_P = 0{,}915 \cdot 4{,}87 - 0{,}403 \cdot 40{,}13 = -11{,}73 \text{ mm} ,$$

$$z_{1P} = 0{,}915\,\bar{z}_P + 0{,}403\,\bar{y}_P = 0{,}915 \cdot 40{,}13 + 0{,}403 \cdot 4{,}87 = 38{,}68 \text{ mm} .$$

Componentele momentului încovoietor în lungul axelor centrale principale sunt

$$M_{y_1} = M_{\bar{y}} \cos\theta_1 = -2 \cdot 10^5 \cdot \cos\left(-23{,}77^0\right) = -1{,}83 \cdot 10^5 \text{ Nmm} ,$$

$$M_{z_1} = -M_{\bar{y}} \sin\theta_1 = 2 \cdot 10^5 \cdot \sin\left(-23{,}77^0\right) = -0{,}806 \cdot 10^5 \text{ Nmm} .$$

Rezultă că tensiunea normală în punctul *P* este

$$\sigma_P = -\frac{M_{z_1}}{I_2} y_{1P} + \frac{M_{y_1}}{I_1} z_{1P} =$$

$$= -\frac{-0{,}806 \cdot 10^5}{3{,}59 \cdot 10^4}(-11{,}73) + \frac{-1{,}83 \cdot 10^5}{20{,}072 \cdot 10^4} 38{,}68 = -61{,}6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Se obține deci același rezultat ca prin prima metodă, însă efortul de calcul este mai mare.

8.3 Tensiuni de forfecare la încovoierea simplă

Deobicei încovoierea este rezultatul acțiunii unor sarcini transversale asupra barelor. În general, în secțiunea transversală acționează, pe lângă momentul încovoietor, care produce tensiuni normale, și o forță tăietoare, care produce tensiuni tangențiale și deci, deformații suplimentare de lunecare. Solicitarea produsă de acțiunea simultană a momentului încovoietor și a forței tăietoare se mai numește *încovoiere simplă*.

Din considerente bazate pe dualitatea tensiunilor tangențiale, în dreptul fibrelor extreme tensiunile tangențiale paralele cu forța tăietoare sunt nule, având diverse legi de variație pe înălțimea secțiunii, funcție de forma acesteia. Datorită distribuției neliniare a tensiunilor tangențiale, apare o *deplanare* a secțiunii transversale, deci ipoteza lui Bernoulli nu mai poate fi utilizată la stabilirea formulei tensiunilor normale.

Se constată că la bare cu secțiuni având raportul h/ℓ (între înălțimea secțiunii și lungimea barei) relativ mic ($<1/10$), calculul tensiunilor normale se poate face cu formulele deduse pentru încovoierea pură. La barele care au raportul h/ℓ relativ mare, formula lui Navier (8.10) și, în general, formulele stabilite în Teoria elasticității pentru învoierea pură dau valori ale tensiunilor normale mai mari decât cele reale.

În continuare, considerând valabilă distribuția liniară a tensiunilor normale de încovoiere, care neglijează deplanarea, se deduce o *expresie aproximativă a tensiunilor tangențiale* produse de forța tăietoare, utilizând numai o condiție de echilibru. Condițiile reale privind geometria deformațiilor se pot folosi numai la stabilirea unei soluții exacte, prin metodele Teoriei elasticității.

8.3.1 Formula lui Juravski

Fie un element de lungime dx, detașat dintr-o bară solicitată la încovoiere simplă (fig. 8.8), în lungul căruia se consideră că forța tăietoare este constantă. În

secțiunea din stânga acționează eforturile M_y şi T_z, iar în secțiunea din dreapta acționează $M_y + \mathrm{d}M_y$ şi T_z.

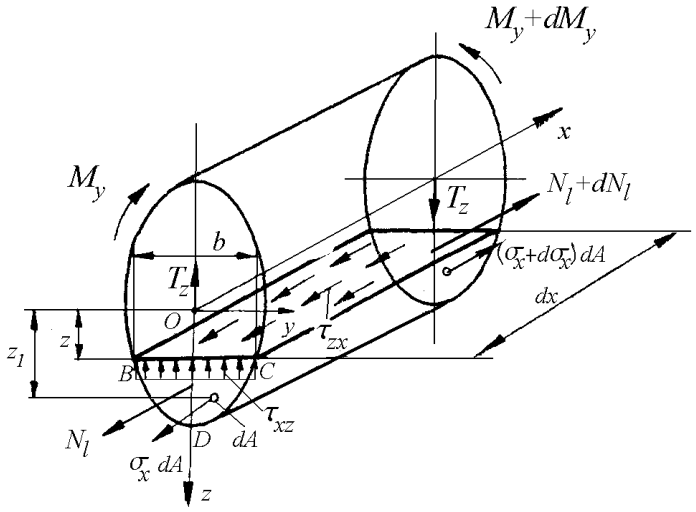


Fig. 8.8

Se secționează apoi acest element cu un plan paralel cu *xOy*, la distanța *z* de acesta, obținându-se elementul desenat cu linii mai groase. Pe fețele frontale ale acestui element acționează tensiuni normale σ_x, respectiv $\sigma_x + \mathrm{d}\sigma_x$, iar pe fața superioară acționează tensiuni tangențiale, complementare celor produse de forța tăietoare în secțiunea transversală.

Ipoteza lui Juravski. Se consideră că în lungul unei linii *BC*, paralele cu axa neutră *Oy*, *componentele tensiunilor tangențiale* τ_{xz} *paralele cu forța tăietoare sunt uniform distribuite*.

Rezultanta forțelor elementare $\sigma_x\,\mathrm{d}A$ produse de tensiunile normale pe fața din stânga a elementului considerat este

$$N_\ell = \int\limits_{BCD} \sigma_x dA = \int\limits_{BCD} \frac{M_y\, z_1}{I_y}\,\mathrm{d}A = \frac{M_y}{I_y} \int\limits_{BCD} z_1\,\mathrm{d}A = \frac{M_y\, S_y^*}{I_y}, \qquad (8.35)$$

unde S_y^* este momentul static al suprafeței *BCD* față de axa centrală *Oy*.

Pe fața din dreapta a elementului acționează forța

$$N_\ell + \mathrm{d}N_\ell = \frac{\left(M_y + \mathrm{d}M_y\right) S_y^*}{I_y},$$

iar pe fața superioară acționează forța longitudinală de forfecare $\tau_{zx}\, b\, \mathrm{d}x$, unde $b = BC$.

Ecuația de echilibru a forțelor ce acționează asupra elementului considerat se scrie

$$N_\ell + \tau_{zx}\, b\, \mathrm{d}x - \left(N_\ell + \mathrm{d}N_\ell\right) = 0\,.$$

Se obține

$$\tau_{zx} = \frac{1}{b}\frac{\mathrm{d}N_\ell}{\mathrm{d}x}\,, \tag{8.36}$$

sau

$$\tau_{zx} = \frac{1}{b}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{M_y\, S_y^*}{I_y}\right) = \frac{1}{b}\frac{S_y^*}{I_y}\frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x}\,.$$

Deoarece $\dfrac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x} = T_z$ și $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, rezultă expresia tensiunilor tangențiale

$$\boxed{\tau_{xz} = \frac{T_z\, S_y^*}{b\, I_y}} \tag{8.37}$$

cunoscută ca *formula lui Juravski*.

Formula (8.37) este strict valabilă doar pentru bare de secțiune constantă, având *forța tăietoare constantă* în lungul barei. Totuși se constată că, la bare cu dimensiuni transversale mult mai mici decât lungimea barei, eroarea introdusă de variația forței tăietoare în lungul barei este relativ mică.

Se observă că τ_{xz} depinde de raportul S_y^*/b, deci de ordonata *z* la nivelul căreia se evaluează tensiunile tangențiale.

Secțiunea dreptunghiulară

În cazul secțiunii dreptunghiulare (fig. 8.9), $I_y = \dfrac{b\,h^3}{12}$ și

$$S_y^* = b\left(\frac{h}{2} - z\right)\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + z\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) = \frac{b\,h^2}{8}\left(1 - \frac{4\,z^2}{h^2}\right),$$

deci

$$\tau_{xz} = \frac{T_z\, S_y^*}{b\, I_y} = \frac{3}{2}\frac{T_z}{b\,h}\left(1 - \frac{4\,z^2}{h^2}\right). \tag{8.38}$$

Componentele paralele cu forța tăietoare ale tensiunilor tangențiale au o distribuție parabolică pe înălțimea secțiunii. Valoarea maximă, la nivelul axei neutre, este

$$\tau_{xz_{max}} = \frac{3}{2}\frac{T_z}{A} \tag{8.39}$$

unde $A = b\,h$.

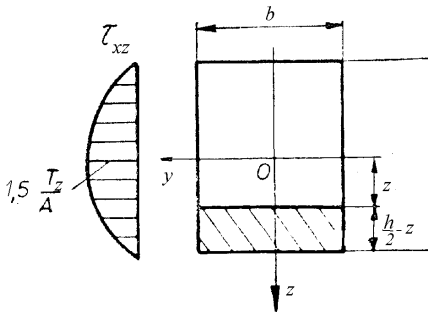


Fig. 8.9

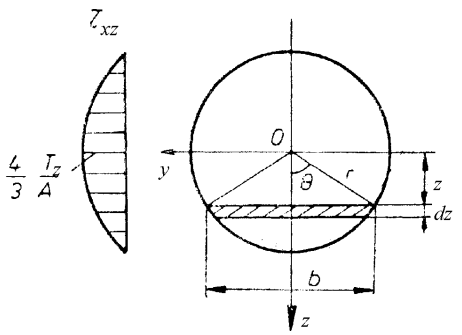


Fig. 8.10

Secțiunea circulară

În cazul secțiunii circulare de rază r (fig. 8.10), $b = 2\,r\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $dz = -r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$, iar aria suprafeței elementului haşurat este

$$dA = b\,\mathrm{d}z = -2\,r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Momentul static al suprafeței situate sub coarda b, calculat față de axa Oy, este

$$S_y^* = \int_0^\theta z\,dA = \int_0^\theta 2\,r^3\sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}r^3\sin^3\theta\,.$$

Rezultă expresia tensiunilor tangențiale paralele cu forța tăietoare

$$\tau_{xz} = \frac{T_z\,S_y^*}{b\,I_y} = \frac{T_z\,\frac{2}{3}r^3\,sin^3\theta}{2\,r\sin\theta\,\frac{\pi\,r^4}{4}} = \frac{4}{3}\frac{T_z}{A}\sin^2\theta\,, \tag{8.40}$$

unde aria cercului $A = \pi\,r^2$.

Valoarea maximă, la nivelul axei neutre, este

$$\tau_{xz_{max}} = \frac{4}{3}\frac{T_z}{A}. \tag{8.41}$$

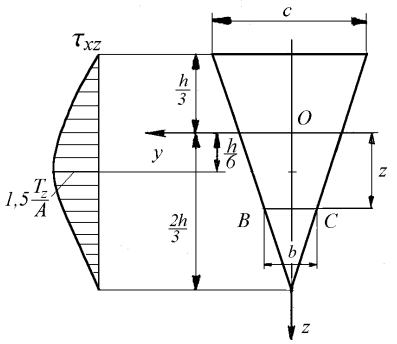


Fig. 8.11

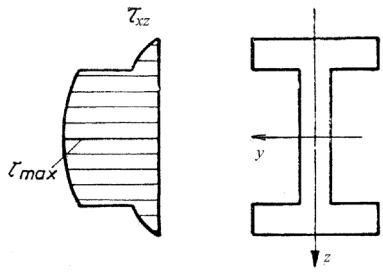


Fig. 8.12

Secțiunea triunghiulară

În cazul secțiunii triunghiulare simetrice, cu baza c şi înălțimea h (fig. 8.11), momentul de inerție axial este $I_y = \frac{c\,h^3}{36}$ iar momentul static al triunghiului situat sub linia BC, la nivelul căreia se calculează tensiunile, este

$$S_y^* = \frac{1}{2}b\left(\frac{2h}{3}-z\right)\left[z+\frac{1}{3}\left(\frac{2h}{3}-z\right)\right] = \frac{b}{3}\left(\frac{2h}{3}-z\right)\left(\frac{h}{3}+z\right),$$

deci tensiunile tangențiale paralele cu forța tăietoare au expresia

$$\tau_{xz} = \frac{T_z\,S_y^*}{b\,I_y} = \frac{12\,T_z}{c\,h^3}\left(\frac{2h}{3}-z\right)\left(\frac{h}{3}+z\right). \tag{8.42}$$

Tensiunea tangențială maximă nu mai apare la nivelul axei neutre, ci la distanța $z = h/6$ spre vârful triunghiului, având valoarea

$$\tau_{xz_{max}} = \frac{3}{2}\frac{T_z}{A}, \tag{8.43}$$

unde aria triunghiului $A = \frac{ch}{2}$.

Secțiunea în formă de I

La secțiunea în formă de I (fig. 8.12), diagrama tensiunilor tangențiale de forfecare τ_{xz} este formată din arce de parabolă, cu o discontinuitate în dreptul trecerii de la tălpi la inima profilului, unde coarda b are o variație bruscă.

Comparație între valorile tensiunilor σ *şi* τ

Fie bara din figura (8.13), cu secțiunea dreptunghiulară $b \times h$.

Tensiunea normală maximă apare în încastrare şi are valoarea

$$\sigma_{max} = \frac{M_{y_{max}}}{W_y} = \frac{F\,\ell}{\frac{b\,h^2}{6}} = \frac{6\,F\,\ell}{b\,h^2}\,.$$

Tensiunea tangențială maximă este

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{T_z}{A} = \frac{3\,F}{2\,b\,h}\,.$$

Se observă că raportul

$$\frac{\tau_{max}}{\sigma_{max}} = \frac{h}{4\,\ell}$$

depinde de raportul h/ℓ între înălțimea secțiunii transversale şi lungimea barei. La barele cu raportul $h/\ell < 1/10$, la care de obicei ipoteza lui Bernoulli este verificată, tensiunile tangențiale sunt neglijabile față de cele normale. Dimensionarea se face numai pe baza momentului încovoietor.

8.3.2 Lunecarea longitudinală

Se consideră două bare suprapuse (fig. 8.14, *a*) în consolă, solicitate la încovoiere de forța *F*.

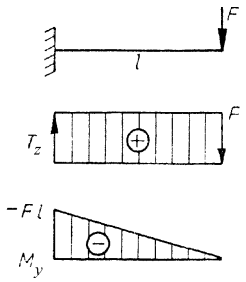


Fig. 8.13

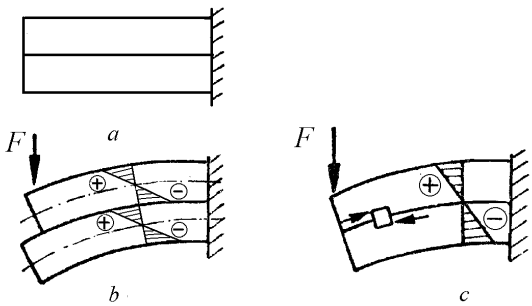


Fig. 8.14

Dacă barele nu sunt îmbinate şi se neglijează frecarea pe suprafețele de contact, deformarea are loc ca în figura 8.14, *b*. Fibrele de sus ale barei de jos sunt întinse, în timp ce fibrele de jos ale barei de sus sunt comprimate, cele două

suprafeţe în contact lunecând una faţă de cealaltă. Fenomenul se numeşte *lunecare longitudinală.*

Dacă barele sunt îmbinate, ele lucrează împreună la încovoiere, ca o singură grindă compusă. Elementele de asamblare împiedică lunecarea longitudinală, fiind solicitate la forfecare (fig. 8.14, *c*). Dimensionarea acestora se face pe baza valorii forţei de lunecare longitudinală N_ℓ.

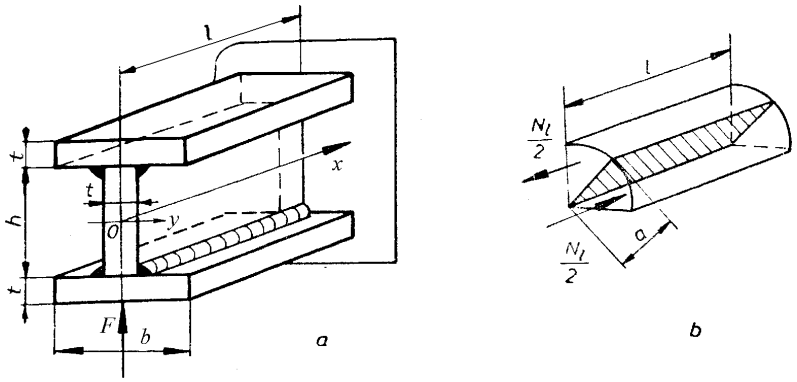


Fig. 8.15

Fie grinda metalică din figura 8.15,*a* îmbinată prin sudare. Conform relaţiilor (8.36) şi (8.37), forţa de lunecare are expresia

$$N_\ell = \int_\ell \tau_{xz}\, b\, \mathrm{d}x = \frac{T_z\, S_y^*}{I_y}\, \ell\,,$$

unde

$$S_y^* = b\, t\, \frac{h+t}{2}\,, \quad I_y = \frac{b\,(h+2\,t)^3}{12} - \frac{(b-t)\,h^3}{12}\,, \qquad T_z = F\,.$$

Cordonul de sudură este solicitat la forfecare (fig. 8.15, *b*). În planul de forfecare (haşurat) se dezvoltă tensiuni tangenţiale. Considerând că acestea sunt uniform distribuite, rezultă

$$\tau = \frac{N_\ell}{2\,a\,\ell}\,,$$

deci forţa capabilă a unui cordon continuu de sudură este

$$N_{cap} = \tau_{as}\, a\, \ell\,,$$

unde τ_{as} este rezistenţa admisibilă la forfecare a cordonului de sudură.

Egalând forța de lunecare cu forța capabilă a două cordoane de sudură, rezultă

$$\frac{T_z\, S_y^*}{I_y}\,\ell = 2\,\tau_{as}\,a\,\ell\,,$$

deci grosimea minimă a cordonului de sudură este

$$a = \frac{S_y^*\, T_z}{2\, I_y\, \tau_{as}}\,,$$

unde S_y^* este momentul static al suprafeței corespunzătoare tălpii secțiunii, calculat față de axa *Oy*.

8.3.3 Modelul de bară cu forfecare

Variația neliniară a tensiunilor tangențiale pe înălțimea secțiunii transversale a unei bare solicitate la încovoiere simplă (fig. 8.16, *a*) produce deformații de lunecare distribuite neuniform pe înălțimea secțiunii (fig. 8.16, *b*), deci deplanarea acesteia (fig. 8.16, *c*). La secțiuni dublu simetrice, lunecările sunt maxime la mijlocul secțiunii şi nule în fibrele extreme.

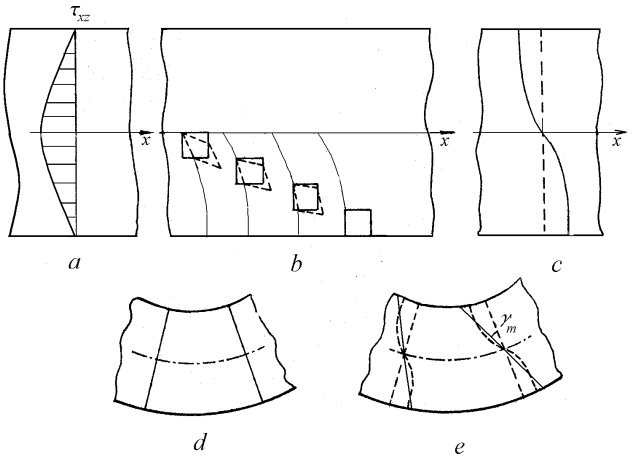


Fig. 8.16

Se poate lucra cu un model de bară bazat pe o *ipoteză modificată a secțiunii plane*, propusă de Timoshenko. Se admite că *o secțiune inițial plană rămâne plană* după solicitarea barei la încovoiere simplă, dar *nu mai este perpendiculară pe fibra medie deformată* a barei (fig. 8.16, *e*).

Se consideră că rotirea secțiunii are o componentă datorită tensiunilor normale (fig. 8.16, *d*) şi o componentă *constantă* datorită lunecărilor produse de tensiunile tangențiale. Fie γ_m unghiul de lunecare specifică mediu, constant pe înălțimea secțiunii (fig. 8.16, *e*). Pe baza legii lui Hooke (3.22), se calculează o tensiune tangențială medie, constantă pe înălțimea secțiunii, $\tau_m = G\,\gamma_m$.

Forța tăietoare în secțiune este

$$T_z = \int_A \tau \, \mathrm{d}A ,$$

unde $\tau = \tau_{xz}$ este tensiunea tangențială paralelă cu forța tăietoare.

Tensiunea tangențială medie se calculează cu relația

$$\tau_m = \frac{T_z}{A_f}$$

unde

$$A_f = k_f \, A \tag{8.44}$$

este o arie echivalentă numită *aria de forfecare*, iar k_f este *factorul de forfecare*.

Pentru determinarea factorului k_f, se egalează expresiile energiei de deformație la forfecare pe unitatea de lungime a barei, bazate pe tensiunile tangențiale reale şi pe tensiunea tangențială medie

$$\int_A \frac{\tau^2}{2\,G} \mathrm{d}A = \frac{\tau_m^2}{2\,G} A_f = \frac{T_z^2}{2\,G\,A_f} = \frac{1}{2\,G\,k_f\,A}\left(\int_A \tau \, \mathrm{d}A \right)^2 .$$

Rezultă formula factorului de forfecare

$$k_f = \frac{\left(\int_A \tau \, \mathrm{d}A \right)^2}{A \int_A \tau^2 \, \mathrm{d}A} . \tag{8.45}$$

Calcule mai precise bazate pe metodele Teoriei elasticității arată că, pentru secțiunea inelară, cu diametrul exterior *D* şi diametrul interior *d*, se obține

$$k_f = \frac{1}{\dfrac{7+6\nu}{6+6\nu} + \dfrac{20+12\nu}{6+6\nu}\left(\dfrac{d/D}{1+(d/D)^2} \right)^2} , \tag{8.46}$$

unde ν este coeficientul de contracție transversală al materialului barei. La o bară cu secțiune circulară plină, din oțel, $k_f = 0{,}886$.

La secțiunea dreptunghiulară, factorul de forfecare are expresia

$$k_f = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu}, \tag{8.47}$$

independentă de raportul laturilor.

La o bară dreptunghiulară din oțel, $k_f = 0{,}850$.

Modelul de bară cu deformații de forfecare este utilizat mai mult la studiul vibrațiilor barelor, unde se include şi un moment încovoietor distribuit liniar, datorit inerției la rotație a elementelor barei. *Modelul de bară Timoshenko* include atât efectul forfecării cât şi al inerției la rotație.

8.4 Bare cu secțiune variabilă

În lungul unei bare solicitate la încovoiere simplă, momentul încovoietor este variabil. La dimensionarea barelor cu secțiune constantă, se egalează tensiunea normală maximă, calculată în secțiunea în care acționează momentul încovoietor maxim, cu rezistența admisibilă la încovoiere. Rezultă o supradimensionare a barei în celelalte secțiuni, în care momentul încovoietor este mai mic, deci tensiunile efective sunt mai mici decât rezistența admisibilă.

O soluție mai rațională din punct de vedere al economiei de material, deci a reducerii greutății, o constituie barele cu secțiune variabilă. În afara condiției de rezistență, forma acestora poate fi determinată de condiții de montaj, de exemplu montarea rulmenților la capetele arborilor maşinilor.

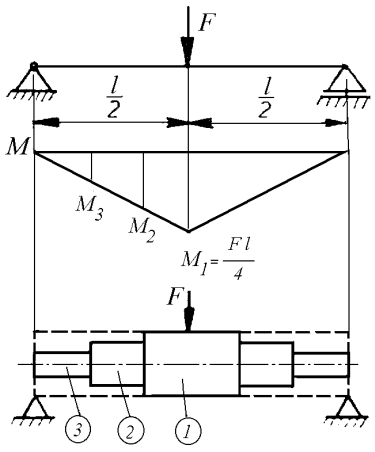


Fig. 8.17

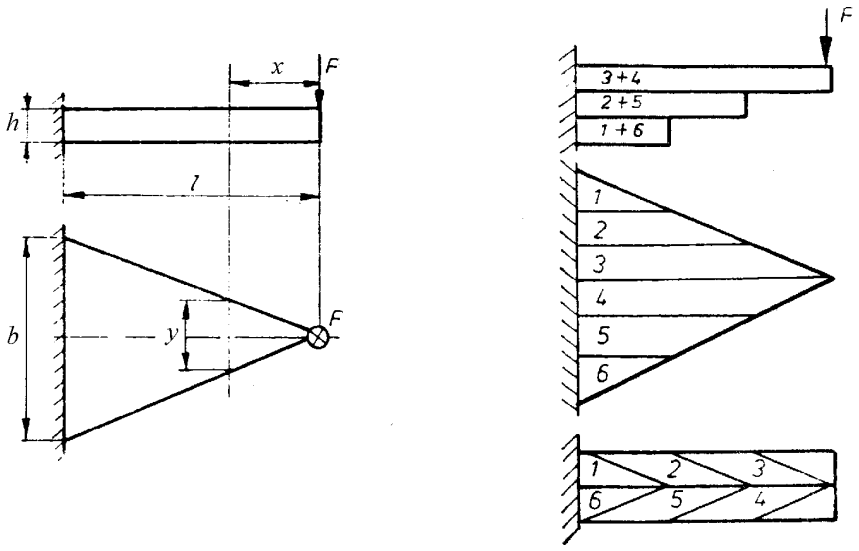
8.4.1 Arborele în trepte

La arborii maşinilor, forma tehnologică se realizează prin variația în trepte a diametrului.

Astfel, la bara din figura 8.17, tronsonul *1* se dimensionează pe baza momentului încovoietor M_1, tronsonul *2* - pe baza momentului M_2, tronsonul *3* - pe baza momentului M_3. Față de soluția cu secțiune constantă în lungul barei (linie întreruptă), se obține o bară mai uşoară, dar cu costul suplimentar al prelucrării. Desigur, la saltul de diametru, trebuie să se țină cont de concentrarea tensiunilor.

8.4.2 Grinda de egală rezistență

Se pot proiecta bare cu secțiune variabilă, realizate astfel încât în orice secțiune tensiunea normală maximă să aibă aceeaşi valoare, de exemplu, să fie egală cu rezistența admisibilă. Acestea se numesc *grinzi de egală rezistență* la încovoiere.



a b

Fig. 8.18

Trebuie îndeplinită condiția

$$|\sigma_{\max}(x)| = \frac{|M_y(x)|}{W_y(x)} = \sigma_a = \text{const.},$$

deci modulul de rezistență axial W_y să aibă aceeaşi lege de variație în lungul barei ca şi momentul încovoietor M_y

$$W_y(x) = \frac{M_y(x)}{\sigma_a}. \tag{8.48}$$

Pentru bara din figura 8.18, *a*, de grosime constantă *h* şi lățime variabilă $y(x) = \frac{b}{\ell} x$, relația (8.48) se scrie $\frac{y h^2}{6} = \frac{F x}{\sigma_a}$ deci

$$y = \frac{6F}{\sigma_a h^2} x. \tag{8.49}$$

Variația liniară a lățimii duce la îndeplinirea condiției de egală rezistență la încovoiere.

Forma din figura 8.18, *a* este netehnologică. Prin tăierea barei în fâşii şi suprapunerea fâşiilor, ca în figura 8.18, *b*, apoi completarea cu structura simetrică, se realizează *arcul cu foi*, întâlnit în suspensia unor vehicule.

8.4.3 Concentrarea tensiunilor la încovoiere

Ca şi la răsucire, discontinuitățile geometrice (de exemplu: arbore în trepte, găuri transversale, degajări, şanțuri de pană), produc variații locale importante ale tensiunilor, ale căror valori maxime sunt mai mari decât cele calculate în ipoteza constanței secțiunii transversale.

Tensiunile maxime se calculează cu relația

$$\sigma_{max} = K_t \, \sigma_{nom},$$

unde σ_{nom} este tensiunea obținută neglijând efectul de concentrare a tensiunilor iar K_t este *factorul teoretic de concentrare a tensiunilor elastice*.

Pentru un arbore în trepte solicitat la încovoiere, variația factorului de concentrare a tensiunilor K_t în funcție de raportul între raza de racordare şi diametrul mic este redată în figura 8.19, pentru cinci valori ale raportului diametrelor celor două porțiuni.

Raze de racordare mici produc valori K_t mari, deci trebuie evitate în proiectare.

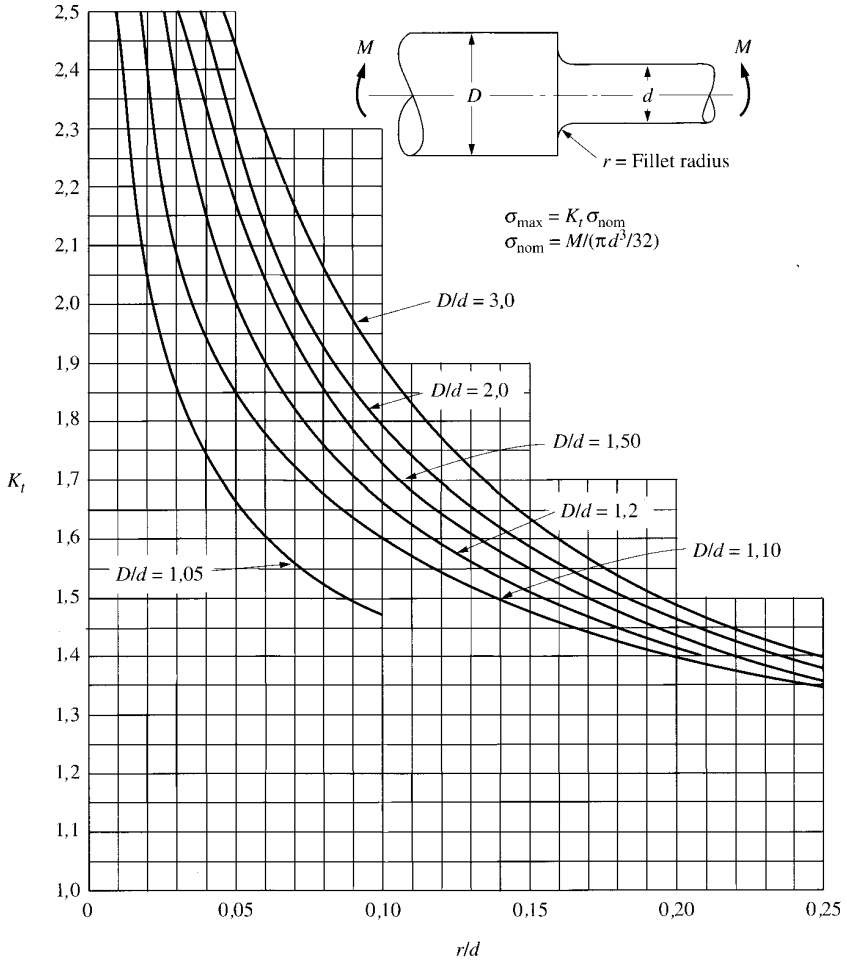


Fig. 8.19 [43]

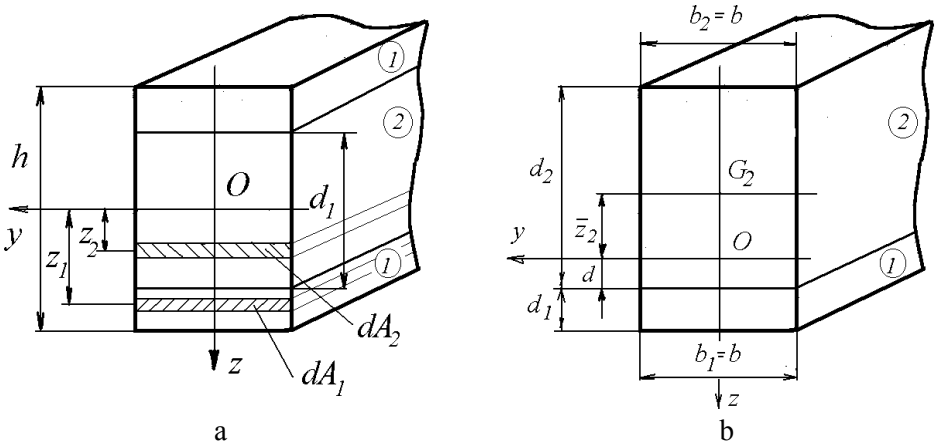
8.5 Bare cu secțiune eterogenă

Barele din materiale diferite sunt utilizate în structuri aeronautice, la grinzi din beton armat, la schiuri cu secțiune sandvici, având o inimă din lemn sau material plastic lipită între două fețe de aluminiu, la ambarcațiuni sportive etc. Fețele din materiale mai rezistente, placajele sau armăturile sunt astfel dispuse încât să preia tensiunile normale mari care apar la marginile de sus şi de jos ale barei, în timp ce materialul inimii preia tensiunile tangențiale maxime de forfecare şi poziționează fețele.

8.5.1 Tensiuni la încovoierea pură simetrică

Calculul la încovoiere pură al barelor de secțiune eterogenă se bazează pe relațiile stabilite pentru barele de secțiune omogenă, utilizând în plus condiția de deformație impusă de lipirea sau solidarizarea celor două materiale.

În figura 8.20, *a* se prezintă o bară cu secțiune dublu simetrică, în care inima *2* este placată cu fâşii identice din materialul *1*. In figura 8.20, *b* se arată o secțiune cu o singură axă de simetrie, la care materialul *2* este protejat la bază cu o platbandă din materialul *1*. Deobicei $E_1 > E_2$. Ambele bare sunt solicitate la încovoiere pură simetrică de un moment $M_y = M$.



a b

Fig. 8.20

Condițiile de echilibru

Deoarece nu există forță axială

$$\int_{A_1} \sigma_1 \, \mathrm{d}A_1 + \int_{A_2} \sigma_2 \, \mathrm{d}A_2 = 0 \, .$$

Suma momentelor M_1 şi M_2 preluate de fiecare material este egală cu momentul încovoietor total *M*

$$M_1 + M_2 = \int_{A_1} z_1 \, \sigma_1 \, \mathrm{d}A_1 + \int_{A_2} z_2 \, \sigma_2 \, \mathrm{d}A_2 = M \, .$$

Compatibilitatea deformațiilor

Unghiurile de rotire sunt egale pentru cele două materiale

$$\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 \, . \qquad (8.50)$$

Relațiile tensiuni - deformații specifice

Din legea lui Hooke

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1, \qquad \sigma_2 = E_2 \varepsilon_2,$$

se obține

$$\frac{M_1}{E_1 I_1} = \frac{M_2}{E_2 I_2} = \frac{M}{E_1 I_1 + E_2 I_2}, \tag{8.51}$$

deci tensiunile sunt

$$\sigma_1 = \frac{M_1 z_1}{I_1} = \frac{M E_1 z_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2}, \tag{8.52, a}$$

$$\sigma_2 = \frac{M_2 z_2}{I_2} = \frac{M E_2 z_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2}. \tag{8.52, b}$$

La secțiunea dublu simetrică

$$I_1 = \frac{b d_1^3}{12}, \qquad I_2 = 2 b \frac{h - d_1}{2} \frac{h + d_1}{4} = \frac{b}{4}\left(h^2 - d_1^2\right).$$

La secțiunea cu o singură axă de simetrie, axa neutră nu mai trece prin centrul geometric al secțiunii. Pentru utilizarea relațiilor de mai sus, trebuie calculată poziția axei neutre. O metodă convenabilă constă în transformarea secțiunii eterogene într-o secțiune echivalentă, dintr-un singur material.

8.5.2 Secțiuni echivalente

La secțiunea din figura 8.20, *b*, se notează *d* distanța de la axa neutră la interfața între cele două materiale.

La nivelul interfeței, alungirile specifice în cele două materiale sunt egale

$$\frac{\sigma_1'}{E_1} = \frac{\sigma_2'}{E_2}, \tag{8.53}$$

dar tensiunile σ_1' şi σ_2' diferă

$$\sigma_1' = \frac{M_1 d}{I_1}, \qquad \sigma_2' = \frac{M_2 d}{I_2}.$$

Din relațiile (8.52) se obține

$$M = \frac{\sigma_1'}{d}\left(I_1 + \frac{E_2}{E_1} I_2\right) = \frac{\sigma_2'}{d}\left(I_2 + \frac{E_1}{E_2} I_1\right) \tag{8.54}$$

unde I_1 şi I_2 sunt momentele de inerţie faţă de axa neutră.

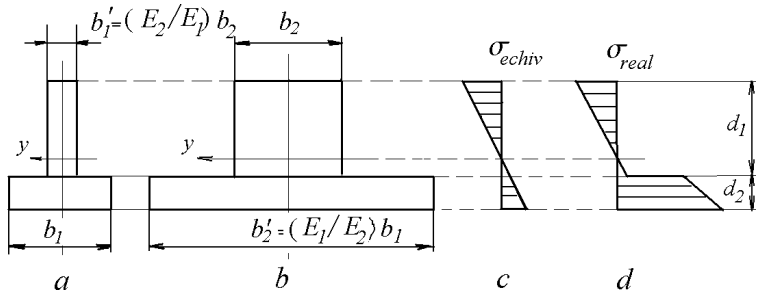


Fig. 8.21

Se observă că în relaţiile (8.54) apare termenul $\frac{E_2}{E_1} I_2$, care se scrie

$$\frac{E_2}{E_1} I_2 = \frac{E_2}{E_1}\left(\frac{b_2\, d_2^3}{12} + b_2\, d_2\, \bar{z}_2^2\right) = \frac{E_2}{E_1} b_2\left(\frac{d_2^3}{12} + d_2\, \bar{z}_2^2\right) = b_1'\left(\frac{d_2^3}{12} + d_2\, \bar{z}_2^2\right)$$

unde $b_1' = \frac{E_2}{E_1} b_2$. Rezultă că acelaşi moment încovoietor se obţine dacă partea de bară din materialul *2* este înlocuită cu o bară executată din materialul *1* de aceeaşi înălţime dar cu lăţimea $\frac{E_2}{E_1} b_2$ (fig. 8.21, *a*). În acest mod se construieşte o *secţiune echivalentă* omogenă, numai din materialul *1*, la care poziţia axei neutre şi distribuţia tensiunilor pe înălţime (fig. 8.21, *c*) se calculează mai uşor. Se poate apoi determina distribuţia relă de tensiuni (fig. 8.21, *d*), utilizând relaţia (8.53).

Analog, materialul *1* poate fi înlocuit cu o fâşie echivalentă executată din materialul 2, având aceeaşi înălţime d_1, dar lăţimea $\frac{E_1}{E_2} b_1$ (fig. 8.21, *b*). În figura 8.21 s-a considerat $E_1 > E_2$ şi $b_1 = b_2$.

8.5.3 Proprietăţi secţionale echivalente

La bare cu secţiune eterogenă de formă oarecare, se pot utiliza proprietăţi secţionale echivalente, ponderate cu ajutorul unui modul de elasticitate de referinţă, notat în continuare E_0. Pentru aceasta, momentele statice şi momentele de inerţie se redefinesc pe baza unei suprafeţe elementare echivalente (fig. 8.22)

$$\mathrm{d}\widetilde{A} = \frac{E}{E_0}\,\mathrm{d}A\,.$$

Momentele statice echivalente față de axele oarecare *yOz* se definesc prin

$$\widetilde{S}_y = \int_A z\,\mathrm{d}\widetilde{A}\,, \qquad \widetilde{S}_z = \int_A y\,\mathrm{d}\widetilde{A}\,.$$

Momentele de inerție echivalente sunt prin definiție

$$\widetilde{I}_y = \int_A z^2\,\mathrm{d}\widetilde{A}\,, \qquad \widetilde{I}_z = \int_A y^2\,\mathrm{d}\widetilde{A}\,, \qquad \widetilde{I}_{yz} = \int_A yz\,\mathrm{d}\widetilde{A}\,.$$

Integralele de mai sus se calculează ca sume de proprietăți ponderate pentru suprafețele ocupate de fiecare material diferit.

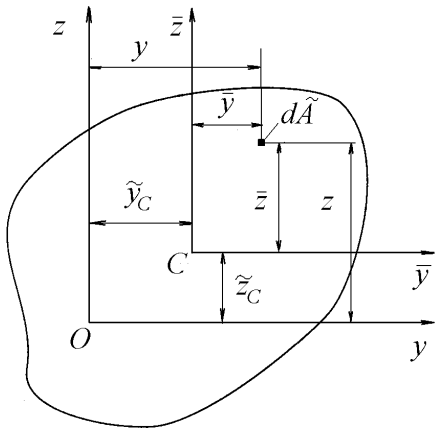


Fig. 8.22

În general, calculul tensiunilor se face față de axe centrale. Poziția *centrului de greutate echivalent C* se determină din condiția ca momentele statice echivalente în sistemul de coordonate central $\bar{y}C\bar{z}$ să fie nule:

$$\widetilde{S}_{\bar{y}} = \int_A \bar{z}\,\mathrm{d}\widetilde{A} = \int_A (z - \widetilde{z}_C)\,\mathrm{d}\widetilde{A} = 0,$$
$$\widetilde{S}_{\bar{z}} = \int_A \bar{y}\,\mathrm{d}\widetilde{A} = \int_A (y - \widetilde{y}_C)\,\mathrm{d}\widetilde{A} = 0,$$

de unde rezultă

$$\widetilde{y}_C = \frac{\widetilde{S}_z}{\widetilde{A}}\,, \qquad \widetilde{z}_C = \frac{\widetilde{S}_y}{\widetilde{A}}\,, \qquad \widetilde{A} = \frac{E}{E_0}A\,.$$

Este evident că, în general, centrul de greutate echivalent *C* coincide cu centrul (de greutate) geometric *G* al suprafeței numai la secțiuni omogene.

Pentru simplificarea expunerii, coordonatele în sistemul central echivalent s-au notat tot cu bară deasupra literei.

Momentele de inerție față de axe centrale, paralele cu axele inițiale, sunt

$$\widetilde{I}_{\bar{y}} = \widetilde{I}_y - \widetilde{A}\,\widetilde{z}_C^2, \qquad \widetilde{I}_{\bar{z}} = \widetilde{I}_z - \widetilde{A}\,\widetilde{y}_C^2\ , \qquad \widetilde{I}_{\overline{yz}} = \widetilde{I}_{yz} - \widetilde{A}\,\widetilde{y}_C\,\widetilde{z}_C\ .$$

Tensiunile normale la încovoierea oblică, față de axe centrale oarecare, se calculează cu relația

$$\sigma_x = \frac{E}{E_0}\left(-\frac{\widetilde{I}_{\overline{yz}}\,M_y + \widetilde{I}_{\bar{y}}\,M_z}{\widetilde{I}_{\bar{y}}\,\widetilde{I}_{\bar{z}} - \widetilde{I}_{\overline{yz}}^2}\,\bar{y} + \frac{\widetilde{I}_{\bar{z}}\,M_y + \widetilde{I}_{\overline{yz}}\,M_z}{\widetilde{I}_{\bar{y}}\,\widetilde{I}_{\bar{z}} - \widetilde{I}_{\overline{yz}}^2}\,\bar{z}\right),$$

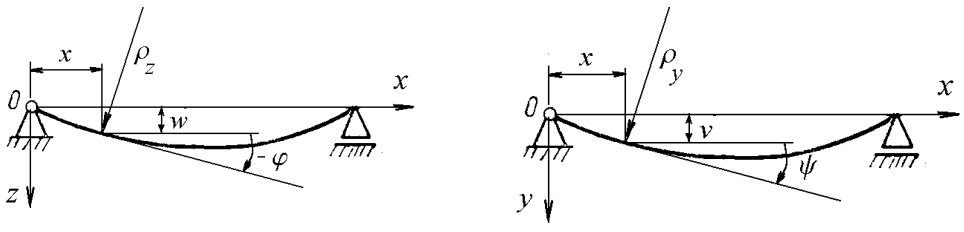
iar față de axe centrale principale, pentru $M_z = 0$, cu relația

$$\sigma_x = \frac{E}{E_0}\,\frac{M_y}{\widetilde{I}_{\bar{y}}}\,\bar{z}\,,$$

echivalentă cu formula lui Navier.

8.6 Deformații la încovoiere

Admițând valabilitatea ipotezei secțiunilor plane, studiul deformațiilor barelor drepte solicitate la încovoiere se reduce la studiul formei deformate a liniei care unește centrele de greutate ale secțiunilor transversale, denumită *fibra medie deformată*, sau *linia elastică* a barei. Din acest motiv, caracteristicile geometrice ale secțiunii barei care intervin în calculul deformațiilor la încovoiere se calculează față de axe centrale. Pentru simplificarea expunerii, se renunță la notația cu bară deasupra literei, utilizată în Capitolul 7.



a b

Fig. 8.23

Forma liniei elastice se definește prin doi parametri: *săgeata* - deplasarea liniară transversală și *panta* (tangentei la linia elastică) sau deformația unghiulară - egală cu rotirea secțiunii transversale, dacă se neglijează forfecarea (fig. 8.23).

Se utilizează următoarele notații: deplasările liniare în lungul axelor *Ox*, *Oy*, *Oz* sunt u, v, w, pozitive în sensul pozitiv al axelor. Deplasările unghiulare (rotirile) față de axele *Ox*, *Oy*, *Oz* sunt θ, φ, ψ, pozitive conform regulii burghiului drept. Se observă că la studiul deplasărilor în planul *xOz* (fig. 8.23, *a*), pantele au semn contrar rotirilor (sensul pozitiv este dat de rotirea axei *Oz* spre *Ox*). În planul *xOy* (fig. 8.23, *b*), semnele pantelor şi rotirilor coincid.

8.6.1 Deformații la încovoierea simetrică

Se vor studia deformațiile în planul *xOz* (fig. 8.23, *a*), pentru bare solicitate de forțe cuprinse într-un plan vertical de simetrie, sau de cupluri cu vectorul moment perpendicular pe acest plan.

Săgețile w sunt pozitive când deplasarea este în jos.

Pantele sunt

$$-\varphi = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}. \tag{8.55}$$

Curbura este dată de relațiile (8.2) şi (8.9)

$$\kappa_y = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M_y}{E\,I_y}, \tag{8.56}$$

de unde rezultă

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{M_y}{E\,I_y}. \tag{8.57}$$

Relația (8.57) se numeşte *ecuația diferențială a liniei elastice a barei*. Prin integrarea acestei ecuații se obțin expresiile analitice ale pantei şi săgeții în orice secțiune a barei.

La bare cu încărcare relativ simplă, având maximum două porțiuni cu expresii diferite ale momentului încovoietor, se poate aplica *metoda integrării analitice* a ecuației (8.57). După prima integrare rezultă panta

$$-\varphi = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \int_{\ell} \left(-\frac{M_y}{E\,I_y} \right) \mathrm{d}x + C_1. \tag{8.58}$$

După a doua integrare rezultă săgeata

$$w = \int_{\ell} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int_{\ell} \left[\int_{\ell} \left(-\frac{M_y}{E\,I_y} \right) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}x + C_1\,x + C_2. \tag{8.59}$$

Constantele de integrare C_1 şi C_2 se determină pe baza valorilor pantei şi săgeții în anumite puncte, deobicei din condițiile la limită (de rezemare) ale barei.

La stabilirea expresiei analitice a momentului încovoietor $M_y(x)$ se utilizează convenția de semne care a stat la baza obținerii relației (8.57).

Relațiile diferențiale

$$\frac{dM_y}{dx} = T_z\,, \qquad \frac{dT_z}{dx} = -p_z\,,$$

conduc la ecuațiile

$$\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3} = -\frac{T_z}{EI_y}\,, \tag{8.60}$$

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} = \frac{p_z}{EI_y}\,. \tag{8.61}$$

Din ecuația (8.61) rezultă că pe porțiunile de bară fără sarcină distribuită, deci pentru $p_z = 0$, $w(x)$ este un polinom de gradul trei în *x* (derivata a patra este nulă). Deci deformata barei nu mai este un arc de cerc, ca la încovoierea pură, ci o curbă de gradul trei, funcție de distanța *x* în lungul barei.

Deformata porțiunilor solicitate de o sarcină transversală uniform distribuită, $p_z = \text{const.}$, este descrisă de un polinom de gradul patru (derivata a cincea este nulă) şi, pe măsură ce legea de distribuție a sarcinii distribuite este mai complicată, creşte gradul polinomului care descrie deformata barei.

Bara în consolă încărcată cu o forță în capăt

Se consideră bara din figura 8.24 cu $EI_y = \text{const.}$ Momentul încovoietor în secțiunea *x* are expresia

$$M_y(x) = -F\,\ell + F\,x\,.$$

Ecuația diferențială a liniei elastice a barei este

$$EI_y\,\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = -M_y(x) = F\,\ell - F\,x\,.$$

Prin două integrări succesive se obține

$$EI_y\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = -EI_y\,\varphi = F\,\ell\,x - F\,\frac{x^2}{2} + C_1\,,$$

$$EI_y\, w = F\,\ell\,\frac{x^2}{2} - F\,\frac{x^3}{6} + C_1\,x + C_2\,.$$

Constantele de integrare se determină pe baza condițiilor la limită. În încastrare, panta şi săgeata sunt nule

$$\varphi\big|_{x=0} = 0\,, \qquad w\big|_{x=0} = 0\,.$$

Rezultă $C_1 = C_2 = 0$, deci expresiile pantei şi săgeții devin

$$-\varphi = \frac{F\ell^2}{EI_y}\left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{2\,\ell^2}\right), \tag{8.62}$$

$$w = \frac{F\ell^3}{EI_y}\left(\frac{x^2}{2\,\ell^2} - \frac{x^3}{6\,\ell^3}\right). \tag{8.63}$$

În capătul barei, pentru $x = \ell$, săgeata maximă este

$$w_{max} = \frac{F\ell^3}{3\,EI_y}\,. \tag{8.64}$$

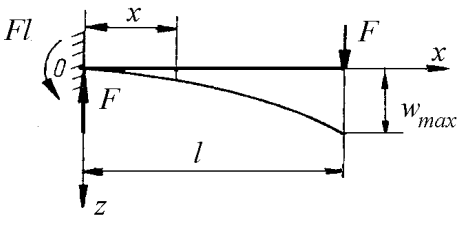


Fig. 8.24

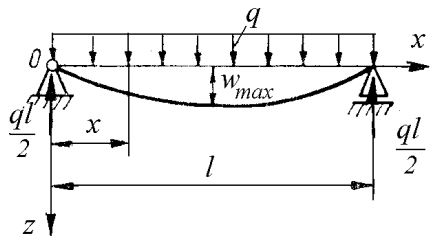


Fig. 8.25

Bara simplu rezemată, încărcată cu sarcină uniform distribuită

Momentul încovoietor în secțiunea *x* a barei din figura 8.25 are expresia

$$M_y(x) = \frac{q\,\ell}{2}\,x - \frac{q\,x^2}{2}\,.$$

Ecuația diferențială a liniei elastice este

$$EI_y\,\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{q\,\ell}{2}\,x + \frac{q\,x^2}{2}\,.$$

Se integrează de două ori

$$-EI_y\,\varphi = -\frac{q\,\ell}{4}\,x^2 + \frac{q\,x^3}{6} + C_1\,,$$

$$EI_y\, w = -\frac{q\,\ell}{12}x^3 + \frac{q\,x^4}{24} + C_1\,x + C_2\,,$$

apoi se determină constantele de integrare din condițiile ca pe reazeme săgeata să fie nulă

$$w\big|_{x=0} = 0\,, \qquad w\big|_{x=\ell} = 0\,.$$

Se obține $C_2 = 0$ şi $C_1 = \dfrac{q\,\ell^3}{24\,EI_y}$.

Rezultă expresiile pantei şi săgeții

$$-\varphi = \frac{q\,\ell^3}{EI_y}\left(\frac{1}{24} + \frac{x^3}{6\,\ell^3} - \frac{x^2}{4\,\ell^2}\right), \tag{8.65}$$

$$w = \frac{q\,\ell^4}{EI_y}\left(\frac{x}{24\,\ell} + \frac{x^4}{24\,\ell^4} - \frac{x^3}{12\,\ell^3}\right) = \frac{q}{24\,EI_y}\left(\ell^3\,x + x^4 - 2\,\ell\,x^3\right). \tag{8.66}$$

Săgeata maximă la mijlocul barei (pentru $x = \ell/2$) este

$$w_{max} = \frac{5\,q\,\ell^4}{384\,EI_y}\,. \tag{8.67}$$

Unghiul de deformație pe reazemul din stânga (pentru $x = 0$) este

$$-\varphi_1 = \frac{q\,\ell^3}{24\,EI_y}\,. \tag{8.68}$$

Alte metode pentru calculul deformațiilor la încovoiere sunt prezentate în capitolul 12.

8.6.2 Deformații la încovoierea oblică

În continuare, calculul se face față de axe centrale oarecare.

Săgețile w şi v sunt pozitive în sensul pozitiv al axelor *Oz*, respectiv *Oy*.

Pantele sunt

$$-\varphi = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\,, \qquad \psi = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,. \tag{8.69}$$

Curburile sunt date de relațiile (8.2), (8.19) şi (8.27)

$$\kappa_y = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = \frac{I_z M_y + I_{yz} M_z}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}, \tag{8.70}$$

$$\kappa_z = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \frac{I_{yz} M_y + I_y M_z}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}. \tag{8.71}$$

Rezultă ecuațiile diferențiale decuplate ale săgeții

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{I_z M_y + I_{yz} M_z}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \frac{I_{yz} M_y + I_y M_z}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}. \tag{8.72}$$

Utilizând relațiile diferențiale $\frac{dM_z}{dx} = -T_y$ și $\frac{dM_y}{dx} = T_z$, se obține prin derivare

$$\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3} = -\frac{I_z T_z - I_{yz} T_y}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}, \qquad \frac{\mathrm{d}^3 v}{\mathrm{d}x^3} = \frac{I_{yz} T_z - I_y T_y}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}. \tag{8.73}$$

Utilizând relațiile diferențiale $\frac{dT_y}{dx} = -p_y$ și $\frac{dT_z}{dx} = -p_z$ se obțin ecuațiile

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} = -\frac{I_z p_z - I_{yz} p_y}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}, \qquad \frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}x^4} = \frac{I_y p_y - I_{yz} p_z}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}. \tag{8.74}$$

din care, pentru sarcini și condiții la limită date, se obțin expresiile analitice ale componentelor w și v ale deplasării transversale a punctelor liniei elastice a barei.

Bară în consolă cu secțiune nesimetrică

Fie o bară în consolă, din profil cornier cu aripi neegale așezat ca în figura 8.26, acționată de o forță verticală aplicată în lungul axei centrale *Oz*, în capătul barei.

Deoarece nu există sarcini distribuite, ecuațiile (8.74) devin

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}x^4} = 0,$$

deci deplasările au expresii de forma

$$w(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4,$$

$$v(x) = B_1 x^3 + B_2 x^2 + B_3 x + B_4,$$

unde B_i şi C_i, $i = 1, 2, 3, 4$, sunt constante care se determină din condițiile la limită.

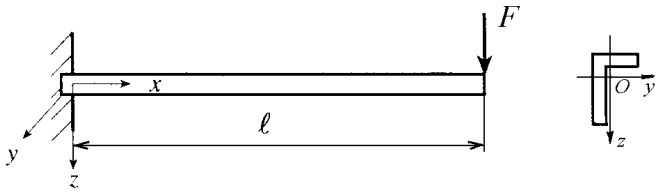


Fig. 8.26

În încastrare, condițiile la limită sunt

$v(0) = 0$, $\psi(0) = 0$, $w(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$.

La capătul liber, condițiile la limită sunt

$M_y(\ell) = 0$, $M_z(\ell) = 0$, $T_y(\ell) = 0$, $T_z(\ell) = F$.

Deoarece ambele momente sunt zero, prima relație (8.72) devine

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}(\ell) = 0 .$$

Din prima relație (8.73) se obține

$$\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}x^3}(\ell) = -\frac{I_z F}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)} .$$

Rezultă

$$C_3 = C_4 = 0 , \quad C_1 = -\frac{I_z F}{6 E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}, \qquad C_2 = -3\,\ell\, C_1 ,$$

deci expresia deplasării $w(x)$ este

$$w(x) = \frac{F I_z (3\ell - \mathrm{x}) x^2}{6 E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)} .$$

Pentru deplasarea în direcția *y,* se obține $B_3 = B_4 = 0$ şi următoarele condiții la capătul liber

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}(\ell) = 0 , \qquad \frac{\mathrm{d}^3 v}{\mathrm{d}x^3}(\ell) = \frac{I_{yz} F}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)},$$

din care rezultă

$$v(x) = -\frac{F\, I_{yz}\,(3\ell - x)\,x^2}{6\,E\left(I_y\, I_z - I_{yz}^2\right)}.$$

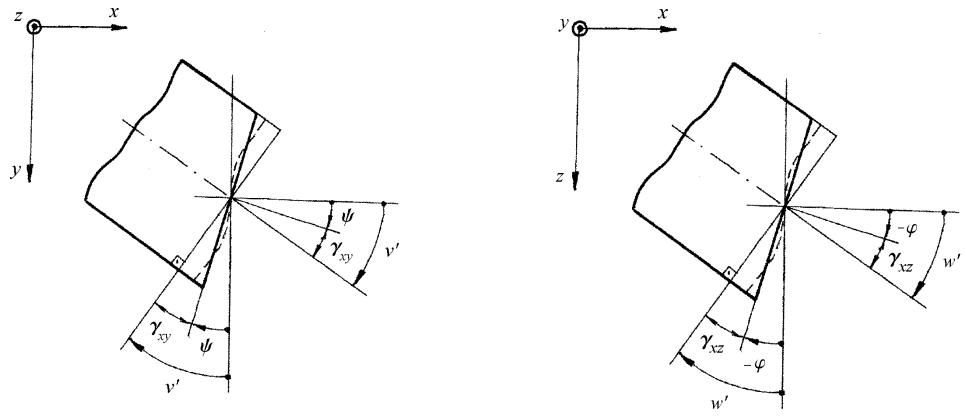
Săgeata totală este

$$\delta = \left(v^2 + w^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Secțiunea barei fiind nesimetrică, forța verticală produce o deplasare pe o direcție înclinată față de verticală, deci încovoiere oblică.

8.6.3 Efectul forfecării

La încovoierea simplă, momentul încovoietor produce curbarea barei iar forța tăietoare produce deformații suplimentare datorită forfecării. Studiul efectului forfecării asupra deformațiilor la încovoiere se poate face adoptând ipoteza secțiunii plane modificată de Timoshenko. Pe baza acesteia se introduce un unghi de lunecare specifică mediu, constant pe înălțimea secțiunii barei, şi o arie efectivă de forfecare (8.44), calculată înmulțind aria reală cu un factor de forfecare (8.45).



a b

Fig. 8.27

Echilibrul

Ecuațiile diferențiale de echilibru (2.7) şi (2.8) sunt

$$\frac{dM_z}{dx} = -T_y, \qquad \frac{dM_y}{dx} = T_z,$$

$$\frac{dT_y}{dx} = -p_y, \qquad \frac{dT_z}{dx} = -p_z$$

Geometria deformației

Curburile sunt date de relațiile (8.19)

$$\kappa_y = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}, \qquad \kappa_z = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}.$$

Din figura (8.27) se obțin relațiile între pantă, rotirea secțiunii şi lunecarea specifică medie

$$\gamma_{xy} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \psi, \qquad \gamma_{xz} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \varphi, \qquad (8.75)$$

Relațiile între eforturi şi deformații specifice

$$\kappa_z = \frac{M_z}{EI_z}, \qquad \kappa_y = \frac{M_y}{EI_y},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{T_y}{GA_f}, \qquad \gamma_{xz} = \frac{T_z}{GA_f},$$

unde $A_f = k_f A$, iar k_f este factorul de forfecare. În general, acesta are valori diferite în cele două plane *xOy* şi *xOz*, dar în continuare se consideră constant.

Eliminând curburile şi lunecările specifice medii, se obține

$$M_z = EI_z \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}, \qquad M_y = EI_y \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x},$$

$$T_y = GA_f \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \psi \right), \qquad T_z = GA_f \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \varphi \right).$$

Eliminând momentele încovoietoare şi forțele tăietoare, rezultă ecuațiile diferențiale ale rotirilor şi săgeților

$$EI_z \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} - GA_f \left(\psi - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \right) = 0, \; EI_y \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} - GA_f \left(\varphi + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \right) = 0, \quad (8.76)$$

$$GA_f \left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} \right) = p_y, \qquad GA_f \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} \right) = -p_z. \qquad (8.77)$$

Din relațiile (8.76) se observă că la modelul de bară cu forfecare săgețile şi rotirile sunt cinematic independente.

8.7 Centrul de forfecare

La barele cu pereţi subţiri solicitate prin forţe perpendiculare pe axa barei, în secţiunea transversală acţionează, în afara tensiunilor normale produse de încovoiere, tensiuni tangenţiale. În general, tensiunile tangenţiale pot proveni din forfecare şi din răsucire. Pentru separarea acestora se calculează *centrul de forfecare*, a cărui poziţie este funcţie numai de geometria secţiunii. Dacă forţa transversală din secţiune trece prin centrul de forfecare, atunci se elimină răsucirea. Deci calculul momentului de răsucire se poate face numai după determinarea centrului de forfecare.

Privită din punct de vedere al încovoierii, problema se pune şi altfel. La secţiuni nesimetrice, chiar dacă planul forţelor transversale trece prin axa barei, în afară de încovoiere se produce şi răsucire. Pentru a produce numai încovoiere, forţa transversală din secţiune trebuie să treacă prin centrul de forfecare, numit şi *centrul de încovoiere*.

Datorită dualităţii tensiunilor tangenţiale, acestea trebuie să fie orientate paralel cu linia mediană a profilului. Rezultă că, în porţiunile profilului care nu sunt paralele cu forţa transversală exterioară, acţionează tensiuni tangenţiale care nu au direcţia forţei tăietoare, dar a căror mărime este totuşi proporţională cu aceasta. Forţele tăietoare care rezultă din însumarea acestor tensiuni tangenţiale se pot reduce la un cuplu diferit de zero care produce răsucirea profilului.

În cazul profilelor subţiri deschise se aplică *ipoteza lui Juravski modificată,* conform căreia *pe o fâşie subţire din planul secţiunii transversale, perpendiculară pe linia mediană a profilului, tensiunile tangenţiale provenind din forfecare sunt constante şi orientate în direcţia liniei mediane*. Aşa cum s-a arătat în capitolul 6, tensiunile tangenţiale produse de răsucirea liberă variază liniar pe grosimea peretelui, fiind nule pe linia mediană.

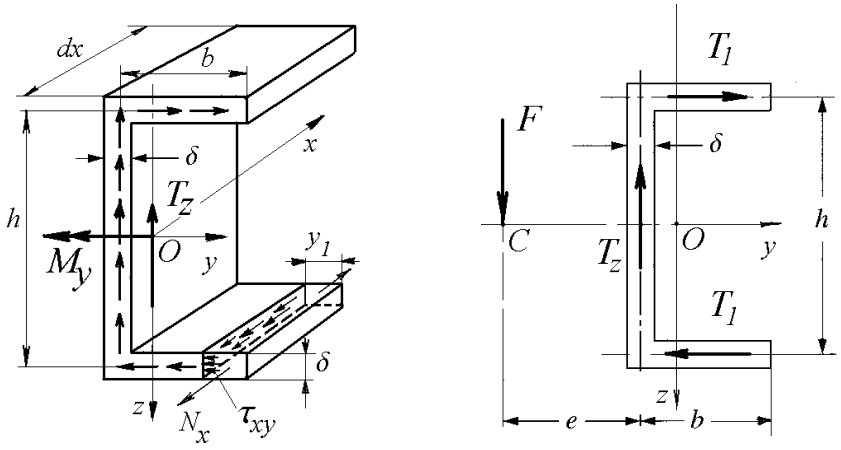
Pe baza ipotezei modificate a lui Juravski se calculează tensiunile tangenţiale provenind din forfecare. Se calculează apoi rezultanta acestora şi, faţă de poziţia punctului de aplicaţie al acesteia, se calculează momentul de răsucire cu ajutorul căruia se determină în continuare tensiunile tangenţiale produse de răsucire.

În cazul profilului U din figura 8.28, *a*, tensiunile tangenţiale din tălpi produc forţe tăietoare orizontale egale şi de sensuri contrare. Acestea formează un cuplu faţă de axa *Ox*, care tinde să producă răsucirea. Aceasta este evitată dacă forţa verticală *F* este aplicată în punctul *C*, centrul de forfecare al secţiunii, producând un cuplu egal şi de sens contrar cu cel al forţelor orizontale (fig. 8.28,*b*).

Formula lui Juravski (8.37) se scrie

$$\tau = \frac{T_z\, S_y^*}{\delta\, I_y} \tag{8.78}$$

unde δ este grosimea profilului în zona unde se calculează tensiunile de forfecare, iar S_y^* este momentul static, față de axa centrală principală *Oy*, al porțiunii secțiunii transversale situate până la fâşia considerată.



a b

Fig. 8.28

La profilul din figura 8.28, *a*, tensiunile tangențiale în talpa inferioară au expresia

$$\tau_{xy} = \frac{T_z\, S_y^*}{\delta\, I_y} = \frac{T_z}{\delta\, I_y}\delta\, y\, \frac{h}{2}, \tag{8.79}$$

deci variază liniar, fiind nule la marginea profilului şi maxime la inimă

$$\tau_{xy_{max}} = \frac{T_z\, \delta\, h}{2\, I_y}. \tag{8.80}$$

Forța tăietoare orizontală dintr-o talpă este

$$T_1 = \frac{\tau_{xy_{max}}\, \delta\, b}{2} = \frac{T_z\, \delta\, h b^2}{4\, I_y}. \tag{8.81}$$

Cuplul forțelor orizontale este echilibrat de momentul forței transversale $F = T_z$ aplicate în centrul de forfecare, la distanța *e* de mijlocul inimii

$$T_1 h = F e .$$

Rezultă poziția centrului de forfecare

$$e = \frac{T_1 h}{T_z} = \frac{\delta h^2 b^2}{4 I_y}, \tag{8.82}$$

sau, înlocuind $I_y \cong \frac{\delta h^3}{12} + 2\delta h \frac{h^2}{4}$, expresia independentă de grosimea profilului

$$e = \frac{3 b^2}{h + 6 b}. \tag{8.83}$$

8.8 Tensiuni în bare curbe

Fie un element de bară curbă, delimitat de două secțiuni plane (între care există unghiul $\mathrm{d}\varphi$) şi solicitat la încovoiere pură prin momentul M (fig. 8.29). Se notează: R - raza centrului de greutate G, R_1 - raza interioară, R_2 - raza exterioară, r - raza fibrei neutre, e - excentricitatea axei neutre Ny, z - distanța de la axa neutră Ny la o fibră oarecare, d_1 - distanța de la axa neutră la fibra interioară, d_2 - distanța de la axa neutră la fibra exterioară, A - aria suprafeței secțiunii transversale.

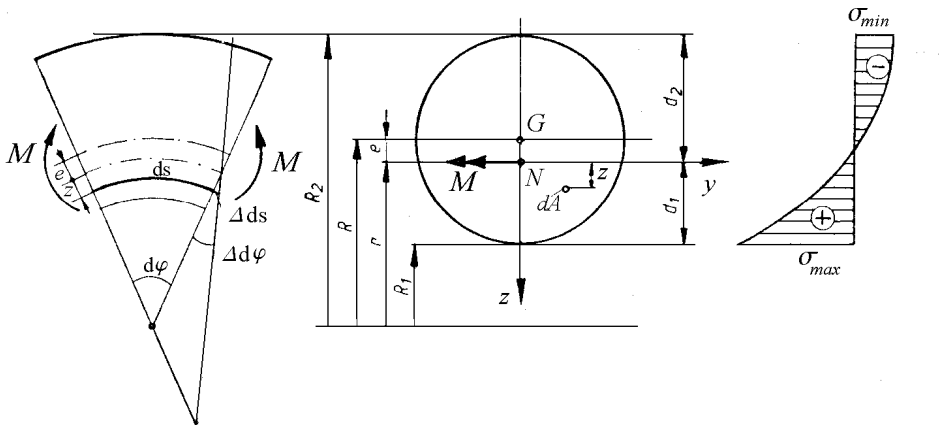


Fig. 8.29

Geometria deformației

Presupunând secțiunea din stânga fixă, sub acțiunea momentului încovoietor secțiunea din dreapta se roteşte (în raport cu cea din stânga) cu unghiul

$\Delta\,\mathrm{d}\varphi$. Ca urmare, o fibră oarecare de lungime $ds=(r-z)\mathrm{d}\varphi$ se lungeşte cu $\Delta \mathrm{d}s = z\,\Delta\mathrm{d}\varphi$, deci alungirea specifică a fibrei este

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta \mathrm{d}s}{\mathrm{d}s} = \frac{z\,\Delta\mathrm{d}\varphi}{(r-z)\mathrm{d}\varphi}. \tag{8.84}$$

Relaţia tensiuni-deformaţii specifice

Utilizând legea lui Hooke, se obţine expresia tensiunii normale (tangente la fibră)

$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x = \frac{E\,\Delta\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\,\frac{z}{r-z}. \tag{8.85}$$

Condiţii de echilibru

Deoarece în secţiune nu există forţă axială, suma forţelor axiale elementare este nulă

$$\int_A \sigma_x\,\mathrm{d}A = \int_A \frac{E\,\Delta\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\,\frac{z}{r-z}\,\mathrm{d}A = 0,$$

de unde rezultă

$$\int_A \frac{z}{r-z}\,\mathrm{d}A = 0, \tag{8.86}$$

relaţie cu ajutorul căreia se determină poziţia axei neutre.

Suma momentelor forţelor axiale elementare faţă de axa *Ny* echilibrează momentul încovoietor *M*, prin urmare :

$$M = \int_A z\,\sigma_x\,\mathrm{d}A = \frac{E\,\Delta\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\int_A \frac{z^2}{r-z}\,\mathrm{d}A,$$

$$M = -\frac{E\,\Delta\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\int_A \left(z - \frac{r\,z}{r-z}\right)\mathrm{d}A,$$

$$M = -\frac{E\,\Delta\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\int_A z\,\mathrm{d}A + \frac{E\,\Delta\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\,r\int_A \frac{z}{r-z}\,\mathrm{d}A = -\frac{E\,\Delta\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\,A\,z_G,$$

$$M = \frac{E\,\Delta\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\,A\,e.$$

Înlocuind $\frac{E\,\Delta \mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{M}{A\,e}$ în relația (8.85), se obține expresia tensiunilor normale

$$\boxed{\sigma_x=\frac{M}{A\,e}\,\frac{z}{r-z}} \tag{8.87}$$

Rezultă că la bare curbe distribuția tensiunilor normale pe înălțimea secțiunii este hiperbolică (fig. 8.29).

În fibrele extreme tensiunile au valorile

$$\sigma_{max}=\frac{M}{A\,e}\,\frac{d_1}{R_1},\qquad \sigma_{min}=-\frac{M}{A\,e}\,\frac{d_2}{R_2} \tag{8.88}$$

Rezolvând integrala (8.86) se determină valoarea razei *r*. În general se calculează excentricitatea

$$e=R-r\cong\frac{I_G}{A\,R}, \tag{8.89}$$

unde I_G este momentul de inerție al secțiunii față de axa care trece prin centrul de greutate, paralelă cu axa neutră.

La secțiunea dreptunghiulară $b\times h$

$$e\cong\frac{h^2}{12\,R}. \tag{8.90}$$

La secțiunea circulară de diametru *d*, raza fibrei neutre este

$$r=\frac{d^2}{4\left(2R-\sqrt{4R^2-d^2}\right)}. \tag{8.91}$$

În cazul când se consideră acțiunea simultană a forței axiale, tensiunea maximă se calculează cu formula

$$\sigma_{max}=\frac{N}{A}+\frac{M}{A\,e}\,\frac{d_1}{R_1}. \tag{8.92}$$

În general, la elementele curbe solicitarea maximă apare în porțiunea situată spre centrul de curbură.

Exemplul 8.2

Să se determine forța maximă F cu care se poate încărca bara semicirculară de la Exemplul 2.4 (fig. 2.21), dacă $R = 0{,}4\ \text{m}$, iar bara este din oțel cu $\sigma_a = 100\ \text{MPa}$, având: a) secțiune pătrată, cu latura $a = 80\ \text{mm}$; b) secțiune circulară, cu diametrul $d = 80\ \text{mm}$.

Rezolvare

Forța maximă F se determină din condiția $\sigma_{max} = \sigma_a$. Tensiunea maximă se calculează cu formula (8.92) unde $N = N_{max} = 1{,}118\,F$ şi $M = M_{max} = 0{,}618\,F\,R$ (în secțiunea periculoasă, la $\varphi = 63^0 30'$).

a) Dacă bara are secțiunea pătrată cu latura $a = 80\ \text{mm}$, condiția $\sigma_{max} = \sigma_a$ devine

$$\frac{1{,}118\,F}{a^2} + \frac{0{,}618\,F\,R}{a^2\,e}\,\frac{d_1}{R_1} = \sigma_a\,,$$

unde

$$e = R - r \cong \frac{I_G}{A\,R} = \frac{a^4}{12\,a^2 R} = \frac{80^2}{12 \cdot 400} = 1{,}33\ \text{mm}\,,$$

$$R_1 = R - \frac{a}{2} = 400 - 40 = 360\ \text{mm}\,,$$

$$d_1 = \frac{a}{2} - e = 40 - 1{,}33 = 38{,}67\ \text{mm}\,.$$

Înlocuind valorile numerice rezultă

$$\frac{1{,}118\,F}{80^2} + \frac{0{,}618 \cdot 400 \cdot F}{80^2 \cdot 1{,}33}\,\frac{38{,}67}{360} = 100\,,$$

de unde se obține $F = 30{,}35\ \text{kN}$.

b) Dacă bara are secțiunea circulară, cu diametrul $d = 80\ \text{mm}$, condiția $\sigma_{max} = \sigma_a$ se scrie

$$\frac{4 \cdot 1{,}118\,F}{\pi\,d^2} + \frac{4 \cdot 0{,}618\,F\,R}{\pi\,d^2\,e}\,\frac{d_1}{R_1} = \sigma_a\,,$$

unde

$$e = R - r = R - \frac{d^2}{4\left(2R - \sqrt{4R^2 - d^2}\right)} =$$

$$= 400 - \frac{80^2}{4\left(2 \cdot 400 - \sqrt{4 \cdot 400^2 - 80^2}\right)} = 1{,}01 \text{ mm},$$

$$R_1 = R - \frac{d}{2} = 400 - 40 = 360 \text{ mm}, \; d_1 = \frac{d}{2} - e = 40 - 1{,}01 = 38{,}9 \text{ mm}.$$

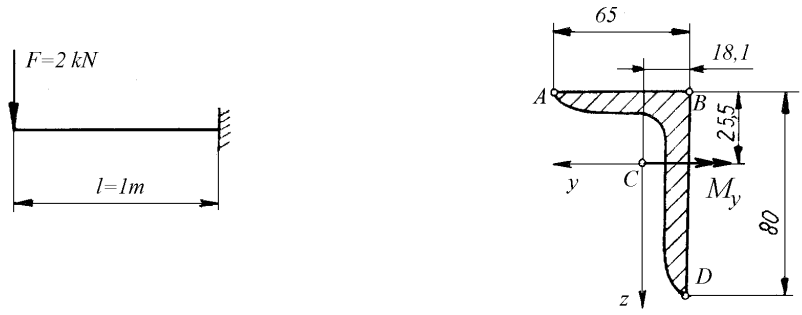
Înlocuind valorile numerice rezultă

$$\frac{4 \cdot 1{,}118 F}{\pi \cdot 80^2} + \frac{4 \cdot 0{,}618 \cdot 400 \cdot F}{\pi \cdot 80^2 \cdot 1{,}01} \frac{38{,}99}{360} = 100,$$

de unde se obține $F = 18{,}19$ kN.

Exemplul 8.3

Pentru bara din figura 8E.3, *a,* să se calculeze tensiunile normale în punctele *A*, *B* şi *D* ale secțiunii din încastrare. Bara este din oțel cornier cu aripi neegale LL $80 \times 65 \times 10$ (fig. 8E.3, *b*).



a *b*

Fig. 8E.3

Rezolvare

Pentru profilul LL $80 \times 65 \times 10$, în STAS 425-80 se găsesc momentele de inerție ale secțiunii: $I_y = 82{,}2 \cdot 10^4$ mm^4, $I_z = 48{,}3 \cdot 10^4$ mm^4. Cu ajutorul relației (7.39), cunoscând momentele de inerție principale, se poate calcula $I_{yz} = 36{,}92 \cdot 10^4$ mm^4.

Aplicând formula (8.30) se obține

$$\sigma_A = -2 \cdot 10^6 \cdot \frac{48{,}3 \cdot (-25{,}5) - 36{,}92 \cdot 46{,}9}{82{,}2 \cdot 48{,}3 - 36{,}92^2} \cdot 10^{-4} = 227{,}3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\sigma_B = -2 \cdot 10^6 \cdot \frac{48{,}3 \cdot (-25{,}5) - 36{,}92 \cdot (-18{,}1)}{82{,}2 \cdot 48{,}3 - 36{,}92^2} \cdot 10^{-4} = 43{,}2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\sigma_D = -2\cdot 10^6 \cdot \frac{48{,}3\cdot 54{,}5 - 36{,}92\cdot(-18{,}1)}{82{,}2\cdot 48{,}3 - 36{,}92^2}\cdot 10^{-4} = -253{,}2\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Exemplul 8.4

Să se verifice grinda reprezentată în figura 2.13, *e*, realizată din două profile I10 aşezate ca în figura 8E.4, dacă $\sigma_a = 140$ MPa .

Rezolvare

Din figura 2.13, *e* rezultă $|M_{max}| = 9$ kNm .

În *Anexa 2a*, pentru profilul I10 se găseşte momentul de inerţie $I'_y = 171\cdot 10^4\,\text{mm}^4$. Pentru secţiunea grinzii, momentul de inerţie va fi

$$I_y = 2I'_y = 342\cdot 10^4\,\text{mm}^4,$$

iar

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{342\cdot 10^4}{50} = 68{,}4\cdot 10^3\,\text{mm}^3.$$

Înlocuind în formula de verificare (8.14, *b*), se obţine

$$\sigma_{ef} = \frac{M}{W_y} = \frac{9\cdot 10^6}{68{,}4\cdot 10^3} = 131{,}6\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < \sigma_a .$$

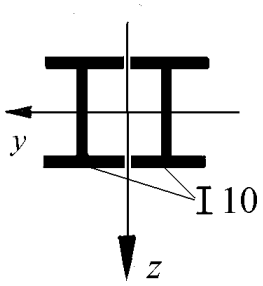


Fig. 8E.4

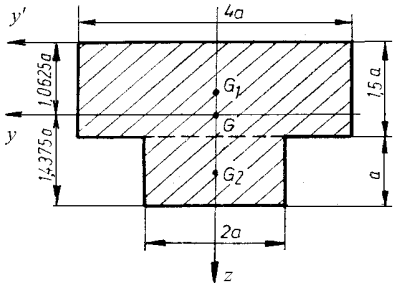


Fig. 8E.5

Exemplul 8.5

Să se dimensioneze bara din figura 2.13, *a* din oţel cu $\sigma_a = 80$ MPa , având secţiunea din figura 8E.5.

Rezolvare

Din figura 2.13, *a* rezultă $|M_{max}| = 250$ Nm , deci

$$W_{y_{nec}} = \frac{M_{max}}{\sigma_a} = \frac{250 \cdot 10^3}{80} = 3{,}125 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 .$$

Se calculează poziția centrului de greutate al secțiunii din figura 8E.5 față de axa y':

$$z_G = \frac{6a^2 \cdot 0{,}75a + 2a^2 \cdot 2a}{8a^2} = 1{,}0625\, a .$$

Momentul de inerție față de axa *Gy* este

$$I_y = \frac{4a \cdot (1{,}5a)^3}{12} + 6a^2 \cdot (0{,}3125a)^2 + \frac{2a \cdot a^3}{12} + 2a^2 \cdot (0{,}9375a)^2 = 3{,}635a^4 ,$$

iar modulul de rezistență axial al secțiunii

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{3{,}635\, a^4}{1{,}4375\, a} = 2{,}528\, a^3 .$$

Egalând cele două expresii ale lui W_y, adică $2{,}528\, a^3 = 3{,}125 \cdot 10^3$, rezultă $a = 10{,}73$ mm , deci se alege

$$a = 11 \text{ mm} .$$

Exemplul 8.6

Bara în consolă din figura 8E.6 are lungimea $\ell = 1$ m şi este solicitată la capătul liber de o forță $F = 3$ kN înclinată cu unghiul $\alpha = 20^0$ față de verticală. Se cere tensiunea normală maximă şi punctul unde apare.

Rezolvare

Secțiunea transversală se împarte în două dreptunghiuri, ca în figura 8E.6, *b*. Se calculează poziția centrului de greutate față de o axă care coincide cu latura din stânga

$$y_G = \frac{100 \cdot 10 \cdot 50 + 90 \cdot 10 \cdot 5}{100 \cdot 10 + 90 \cdot 10} = 28{,}68 \text{ mm} .$$

Față de latura de sus se obține $z_G = 28{,}68$ mm .

Se trasează axele *Gy* şi *Gz* ca în figura 8E.6, *b*.

Se calculează momentele de inerție față de axele *Gy* şi *Gz*

$$I_y = I_z = 180 \cdot 10^4 \text{ mm}^4,\ I_{yz} = 106{,}59 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

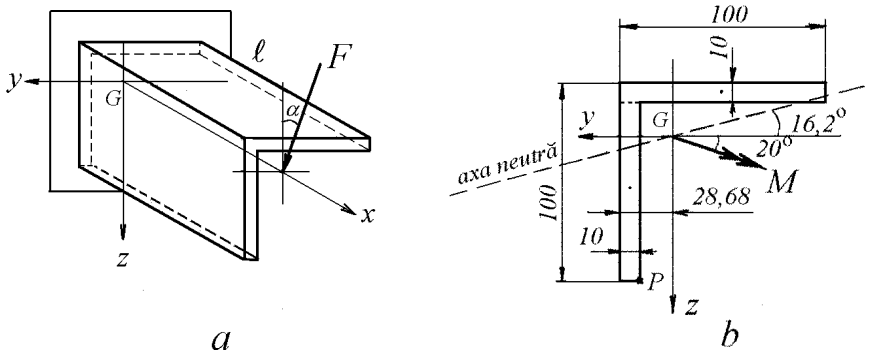


Fig. 8E.6

Momentul încovoietor este maxim în încastrare

$$M = F\ell = 3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = 3 \cdot 10^6 \text{ Nmm}.$$

Componentele momentului încovoietor în lungul axelor sunt

$$M_y = -M \cos 20^0 = -3 \cdot 10^6 \cdot 0{,}9397 = -2{,}82 \cdot 10^6 \text{ Nmm},$$

$$M_z = M \sin 20^0 = 3 \cdot 10^6 \cdot 0{,}342 = 1{,}026 \cdot 10^6 \text{ Nmm}.$$

Ecuația axei neutre (8.29) este

$$z = \frac{I_{yz} M_y + I_y M_z}{I_z M_y + I_{yz} M_z} y = \frac{106{,}59 \cdot (-2{,}819) + 180 \cdot 1{,}026}{180 \cdot (-2{,}819) + 106{,}59 \cdot 1{,}026} y = 0{,}291\, y.$$

Înclinarea axei neutre față de axa *Gy* (v.fig.8E.6, *b*) este

$$\beta = \text{arctg } 0{,}291 = 16{,}22^0.$$

Tensiunile normale (8.28) au expresia

$$\sigma_x = 0{,}55\, y - 1{,}89\, z.$$

În punctul cel mai îndepărtat de axa neutră $P(18{,}68;\ 71{,}32)$ tensiunea maximă este

$$\sigma_P = -124{,}7 \text{ N/mm}^2.$$

Exemplul 8.7

O bară în consolă cu secțiunea în Z (Fig. 8E.7, *a*) are lungimea $\ell = 2$ m şi este solicitată la capătul liber de o forță $F = 1$ kN înclinată la 30^0 față de verticală. Se cere tensiunea normală maximă şi punctul unde apare.

Rezolvare

Secțiunea transversală se împarte în trei dreptunghiuri, ca în figura 8E.7, *b*. Datorită antisimetriei, centrul de greutate se află la mijlocul figurii. Se trasează axele centrale neprincipale *Gy* şi *Gz*.

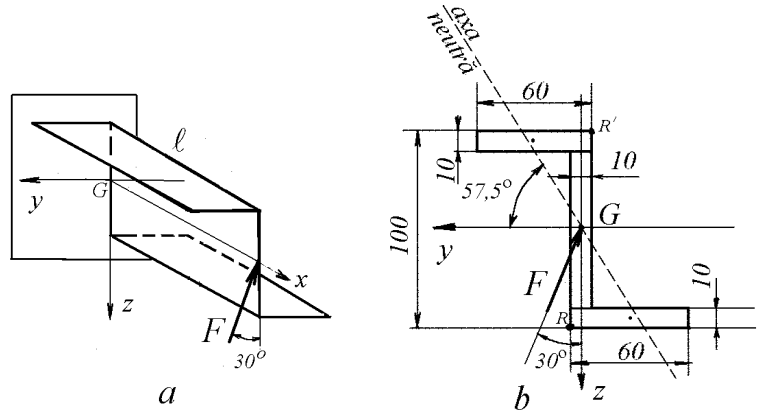


Fig. 8E.7

Momentele de inerție față de axele *Gy* şi *Gz* sunt

$$I_y = 286{,}66 \cdot 10^4 \,\text{mm}^4,\ I_z = 111{,}66 \cdot 10^4 \,\text{mm}^4,\ I_{yz} = -135 \cdot 10^4 \,\text{mm}^4.$$

În încastrare, momentul încovoietor maxim este

$$M = F\ell = 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3 = 2 \cdot 10^6 \,\text{Nmm}.$$

Componentele momentului încovoietor în lungul axelor *Gy* şi *Gz* sunt

$$M_y = M\cos 30^0 = 1{,}732 \cdot 10^6 \,\text{Nmm},\ M_z = -M\sin 30^0 = -10^6 \,\text{Nmm}.$$

Ecuația axei neutre (8.29) este

$$z = \frac{I_{yz}\,M_y + I_y M_z}{I_z\,M_y + I_{yz}\,M_z}\,y = \frac{(-135)\cdot 1{,}732 + 286{,}66\cdot(-1)}{111{,}66\cdot 1.732 + (-135)\cdot(-1)}\,y = -1{,}585\,y.$$

Înclinarea axei neutre față de axa *Gy* (v.fig.8E.7, *b*) este

$$\beta = \text{arctg}\,(-1{,}585) = -57{,}75^0.$$

Tensiunile normale (8.28) au expresia

$$\sigma_x = 3{,}7755\,y + 2{,}382\,z.$$

În punctul cel mai îndepărtat de axa neutră $R(5, 50)$ tensiunea normală maximă este $\sigma_R = 138 \,\text{N/mm}^2$.

9.
STĂRI DE TENSIUNI ŞI DEFORMAȚII SPECIFICE

Într-un punct dintr-un corp elastic, starea de tensiuni se poate defini prin tensiunile care acționează pe trei suprafețe (definite în trei plane) perpendiculare între ele, care trec prin punctul considerat. Pe fiecare suprafață acționează o tensiune normală şi o tensiune tangențială, reprezentată prin cele două componente paralele cu muchiile comune. Datorită dualității tensiunilor tangențiale, acestea sunt egale două câte două, deci starea de tensiuni dintr-un punct este definită de şase tensiuni, trei normale şi trei tangențiale.

Întrucât tensiunea într-un punct depinde de orientarea suprafeței pe care acționează, se studiază variația tensiunilor cu rotirea în spațiu a suprafeței.

Este posibil să se aleagă cele trei suprafețe perpendiculare între ele astfel încât pe acestea să nu acționeze tensiuni tangențiale. Tensiunile normale pe aceste suprafețe au valori extreme, una dintre ele fiind tensiunea normală maximă. Determinarea tensiunii maxime şi a orientării supafeței pe care acționează sunt probleme de primă importanță în proiectare. Pe fețele unui octaedru, egal înclinate față de direcțiile principale, acționează tensiuni normale şi tensiuni tangențiale octaedrice. Acestea din urmă sunt utilizate la stabilirea unei condiții de rezistență.

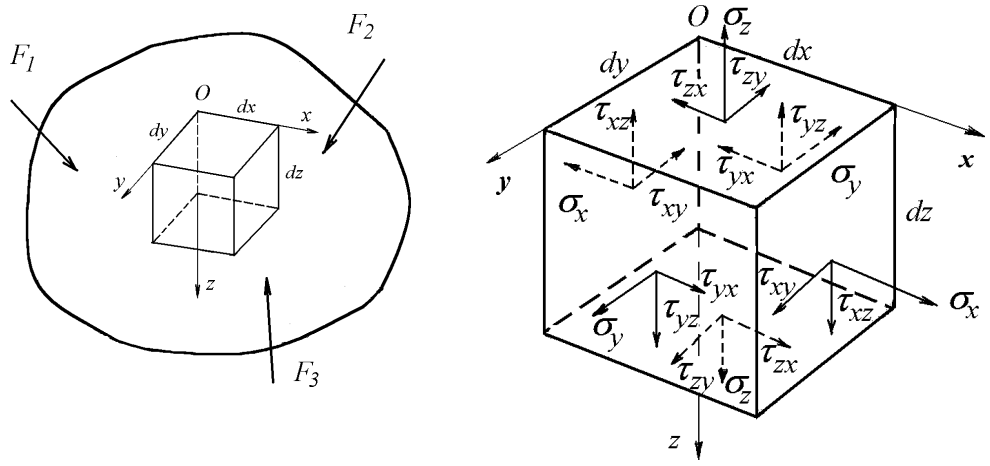
Prin punctul considerat se pot alege alte trei suprafețe perpendiculare între ele, pe care tensiunile tangențiale au valori extreme. Aceste suprafețe sunt înclinate la 45^0 față de cele pe care tensiunile normale au valori extreme.

Starea de deformații specifice într-un punct se defineşte prin trei alungiri specifice şi trei lunecări specifice, fiind dependentă de orientarea în spațiu. În practică, tensiunile nu pot fi determinate direct. Ele se calculează pe baza deformațiilor specifice fie calculate, fie măsurate, de exemplu cu traductoare tensometrice rezistive. Cunoscând alungirile specifice pe trei direcții arbitrare, se calculează alungirile specifice principale, cu care se calculează tensiunile normale principale, pe baza legii lui Hooke.

Un caz aparte îl constituie materialele compozite, care sunt anizotrope. La calculul compozitelor stratificate, în care fibrele din fiecare lamină au orientări diferite, se utilizează relațiile de calcul al tensiunilor şi alungirilor specifice față de axe rotite.

9.1 Starea tridimensională de tensiuni

Se consideră un corp elastic în echilibru static sub acţiunea forţelor exterioare F_1, F_2, F_3 (fig. 9.1, *a*). Dacă din interiorul corpului se detaşează un paralelipiped elementar de laturi d*x*, d*y*, d*z*, pe fiecare faţă a acestui element de volum va acţiona o tensiune care poate fi descompusă în trei componente paralele cu axele *Oxyz* - o tensiune normală şi două tensiuni tangenţiale (fig. 9.1, *b*).



a b

Fig. 9.1

Starea tridimensională de tensiuni se caracterizează prin trei tensiuni normale $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ şi şase tensiuni tangenţiale, egale două câte două $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, conform (3.3). Convenţiile de semne sunt prezentate în paragraful 3.2. În continuare se neglijează forţele distribuite în volum.

9.1.1 Starea de tensiuni în jurul unui punct

Dacă se cunosc tensiunile într-un punct al unui corp, pe trei suprafeţe perpendiculare între ele, se pot determina tensiunile pe orice suprafaţă orientată diferit faţă de acestea care trece prin punctul respectiv.

Pentru aceasta, în jurul punctului se izolează un tetraedru (fig. 9.2, *a*) a cărui faţă înclinată *BCD* este orientată prin versorul normalei $\bar{n}(l, m, n)$, unde $l = \cos(\bar{n}, \bar{i})$, $m = \cos(\bar{n}, \bar{j})$, $n = \cos(\bar{n}, \bar{k})$ sunt cosinuşii directori ai normalei, iar $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ sunt versorii axelor *Ox*, *Oy*, *Oz*.

Se presupune că se cunosc tensiunile normale şi tensiunile tangenţiale pe cele trei feţe ale tetraedrului din planele de coordonate şi se cere determinarea tensiunii rezultante $\bar{p}$, de componente p_x, p_y, p_z, care acţionează pe faţa *BCD*.

Se scrie echilibrul forţelor care acţionează asupra tetraedrului *OBCD*. Dacă dA este aria suprafeţei *BCD*, atunci ariile suprafeţelor *OCD*, *ODB* şi *OBC* au expresiile

$$dA_x = l\,dA\,, \qquad dA_y = m\,dA\,, \qquad dA_z = n\,dA\,. \tag{9.1}$$

Ecuaţia de proiecţii a forţelor pe axa *Ox* (fig. 9.2, *b*) se scrie

$$p_x\,\mathrm{d}A = \sigma_x\,\mathrm{d}A_x + \tau_{yx}\,\mathrm{d}A_y + \tau_{zx}\,\mathrm{d}A_z\,, \tag{9.2}$$

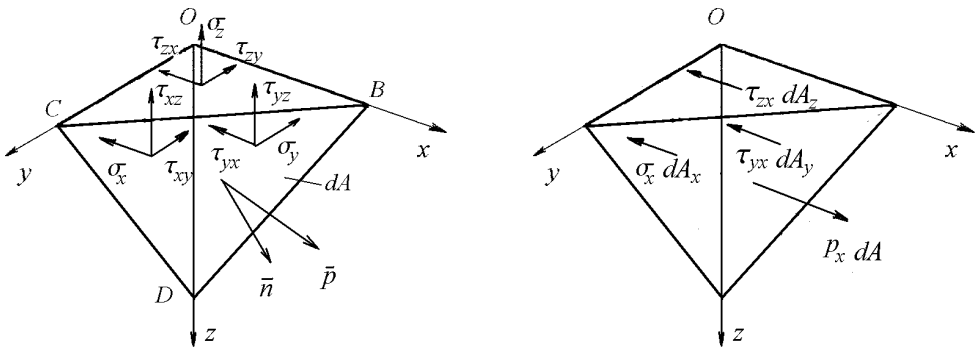
sau, înlocuind expresiile (9.1) în ecuaţia (9.2),

$$p_x = \sigma_x\,l + \tau_{yx}\,m + \tau_{zx}\,n\,. \tag{9.3, a}$$

Din ecuaţiile de proiecţii pe axele *Oy* şi *Oz* rezultă

$$p_y = \tau_{xy}\,l + \sigma_y\,m + \tau_{zy}\,n\,, \tag{9.3, b}$$

$$p_z = \tau_{xz}\,l + \tau_{yz}\,m + \sigma_z\,n\,. \tag{9.3, c}$$



a *b*

Fig. 9.2

Relaţiile (9.3) definesc tensiunea rezultantă pe suprafaţa dA. La limită, când laturile tetraedrului tind spre zero, suprafaţa dA conţine punctul *O*, deci se poate considera că relaţiile (9.3) dau componentele tensiunilor pe un plan înclinat care trece de fapt prin punctul *O*.

Ecuaţiile de momente conduc la relaţiile de dualitate a tensiunilor tangenţiale (3.3).

Relațiile (9.3) se pot scrie matriceal sub forma

$$\{p\}=[T_\sigma]\{n\}. \tag{9.4}$$

unde matricea tensiunilor

$$[T_\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{bmatrix},$$

iar $\{p\}=\{p_x \quad p_y \quad p_z\}^T$ şi $\{n\}=\{l \quad m \quad n\}^T$.

Se descompune tensiunea $\bar{p}$ în componenta normală σ_n şi cea tangențială τ_n. Tensiunea normală σ_n este egală cu proiecția lui $\bar{p}$ pe direcția versorului $\bar{n}$

$$\sigma_n=\bar{p}\cdot\bar{n}=\{p\}^T\{n\}=p_x\,l+p_y\,m+p_z\,n. \tag{9.5}$$

Din relația (9.4) se obține, prin transpunere,

$$\{p\}^T=\{n\}^T[T_\sigma]^T=\{n\}^T[T_\sigma], \tag{9.6}$$

unde s-a utilizat proprietatea de simetrie a matricei tensiunilor $[T_\sigma]$, rezultat direct al dualității tensiunilor tangențiale.

Înlocuind expresia (9.6) în relația (9.5) se obține tensiunea normală

$$\begin{aligned}&\sigma_n=\{n\}^T[T_\sigma]\{n\}=\\ &=\sigma_x\,l^2+\sigma_y\,m^2+\sigma_z\,n^2+2\tau_{xy}\,l\,m+2\tau_{yz}\,m\,n+2\tau_{zx}\,n\,l.\end{aligned} \tag{9.7}$$

Tensiunea tangențială τ_n este egală cu proiecția lui $\bar{p}$ pe planul secțiunii înclinate $\tau_n=|\,\bar{p}\times\bar{n}\,|$.

Dar produsului vectorial

$$\bar{p}\times\bar{n}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ p_x & p_y & p_z\\ l & m & n\end{vmatrix}=$$
$$=(p_y\,n-p_z\,m)\bar{i}+(p_z\,l-p_x\,n)\,\bar{j}+(p_x\,m-p_y\,l)\bar{k},$$

deci valoarea absolută a tensiunii tangențiale este

$$\tau_n=\left[(p_y\,n-p_z\,m)^2+(p_z\,l-p_x\,n)^2+(p_x\,m-p_y\,l)^2\right]^{1/2}. \tag{9.8}$$

Dacă orientarea planului *BCD* se schimbă, atunci valorile tensiunilor σ_n şi τ_n se modifică.

9.1.2 Tensiuni principale

Într-o analiză de tensiuni, interesează valorile extreme ale lui σ_n şi orientarea suprafeţelor pe care acţionează acestea. Problema de extrem condiţionat are constrângerea geometrică

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 . \tag{9.9}$$

Se introduce multiplicatorul lui Lagrange λ şi se calculează valorile extreme ale funcţiei

$$F_1 (l, m, n) = \sigma - \lambda \left(l^2 + m^2 + n^2 - 1 \right). \tag{9.10}$$

Condiţiile ca F_1 să aibă valori extreme, $\partial F_1 / \partial l = 0$, $\partial F_1 / \partial m = 0$, $\partial F_1 / \partial n = 0$, conduc la sistemul de ecuaţii algebrice omogene

$$\begin{aligned} &(\sigma_x - \lambda) l + \tau_{yx}\, m + \tau_{zx}\, n = 0 , \\ &\tau_{xy}\, l + (\sigma_y - \lambda) m + \tau_{zy}\, n = 0 , \\ &\tau_{xz}\, l + \tau_{yz}\, m + (\sigma_z - \lambda) n = 0 . \end{aligned} \tag{9.11}$$

Acesta are forma problemei de valori proprii a matricei tensiunilor

$$[T_\sigma]\{n\} = \lambda \{n\}. \tag{9.12}$$

Pentru a avea soluţii nebanale, determinantul coeficienţilor necunoscutelor l, m, n, trebuie să se anuleze

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \lambda \end{vmatrix} = 0 . \tag{9.13}$$

Ecuaţia caracteristică (9.13) are forma

$$\lambda^3 - J_1 \lambda^2 + J_2 \lambda - J_3 = 0 \tag{9.14}$$

unde coeficienţii au expresiile

$$\begin{aligned} &J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z , \\ &J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 , \\ &J_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x\, \tau_{yz}^2 - \sigma_y\, \tau_{zx}^2 - \sigma_z\, \tau_{xy}^2 + 2\, \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} = \det [T_\sigma] . \end{aligned} \tag{9.15}$$

Soluțiile ecuației (9.14) se numesc *tensiuni normale principale* şi se notează $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, ordonate descrescător. Ele sunt valorile proprii ale matricei tensiunilor $[T_\sigma]$. Lor le corespund *direcțiile principale*,

$$\{n_i\} = \{l_i \quad m_i \quad n_i\}^T, \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (9.16)$$

soluțiile ecuațiilor (9.12) în care s-a înlocuit $\lambda = \sigma_i$

$$[T_\sigma]\{n_i\} = \sigma_i \{n_i\}, \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (9.17)$$

şi care reprezintă vectorii proprii ai matricei $[T_\sigma]$.

Direcțiile principale ale tensiunilor normale definesc orientarea normalelor la suprafețele pe care tensiunile normale au valori extreme. Pe aceste suprafețe nu acționează tensiuni tangențiale.

Într-adevăr, dacă $\tau_n = 0$, atunci $\overline{p} = \lambda \overline{n}$, $p_x = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n = \lambda l$, deci

$$\{p\} = \lambda \{n\} \qquad (9.18)$$

Înlocuind expresia (9.17) în relația (9.4) rezultă ecuația (9.12).

Direcțiile principale sunt perpendiculare între ele, ceea ce se demonstrează pe baza ortogonalității vectorilor proprii ai matricei tensiunilor. Rezultă că, dacă se izolează dintr-un corp elastic un element de volum paralelipipedic având muchiile paralele cu direcțiile principale ale tensiunilor normale, atunci pe fețele elementului acționează numai tensiuni normale, de valori $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

9.1.3 Calculul față de direcțiile principale

Dacă axele de coordonate se aleg în lungul direcțiilor principale ale tensiunilor normale (fig. 9.3, *a*) şi se izolează un tetraedru în jurul originii acestor axe, atunci pe o suprafață înclinată, cu normala definită de cosinuşii directori *l*, *m*, *n*, componentele tensiunii rezultante sunt

$$p_x = \sigma_1 l, \qquad p_y = \sigma_2 m, \qquad p_z = \sigma_3 n. \qquad (9.19)$$

Tensiunea normală pe această suprafață este

$$\sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2. \qquad (9.20)$$

Tensiunea tangențială se calculează din relația

$$\begin{aligned} \tau^2 &= p \cdot p - \sigma^2 = \\ &= \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - \left(\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2\right)^2. \end{aligned} \qquad (9.21,a)$$

După transformări, ținând cont de relația (9.9), se obține

$$\tau = \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n^2 l^2 \right]^{1/2} . \quad (9.21,b)$$

Din relația (9.21,*b*) rezultă că, atunci când $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, tensiunile tangențiale sunt nule indiferent de orientarea suprafeței.

Înlocuind cosinuşii directori din relațiile (9.19) în (9.9), se obține

$$\left(\frac{p_x}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{p_y}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{p_z}{\sigma_3}\right)^2 = 1 . \quad (9.22)$$

Ecuația (9.22) defineşte *elipsoidul tensiunilor*, ale cărui semiaxe sunt tensiunile principale. Această înterpretare geometrică atestă faptul că tensiunile principale sunt valorile extreme ale tensiunilor normale.

Matricea tensiunilor este în acest caz

$$\{T_\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{bmatrix},$$

iar ecuația (9.14) devine

$$(\sigma_1 - \lambda)(\sigma_2 - \lambda)(\sigma_3 - \lambda) = 0 , \quad (9.23)$$

deci

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 , \\ J_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 , \\ J_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 . \end{aligned} \quad (9.24)$$

Mărimile J_1, J_2, J_3 au aceleaşi valori independent de axele de coordonate față de care se defineşte starea de tensiuni. De exemplu

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z .$$

Ca urmare J_1, J_2, J_3 se numesc *invarianți ai tensiunilor*.

9.1.4 Tensiuni tangențiale octaedrale

Un interes aparte îl prezintă tensiunile pe fețele unui octaedru construit față de direcțiile principale (fig. 9.3, *b*). *Planele octaedrale* sunt cele opt fețe ale căror normale fac unghiuri egale cu axele de coordonate. Cosinuşii directori ai fețelor unui octaedru satisfac relațiile

$$l_{oct}^2 = m_{oct}^2 = n_{oct}^2 = \frac{1}{3}, \tag{9.25}$$

deci normalele fac unghiuri de $54{,}73^0$ cu direcțiile principale.

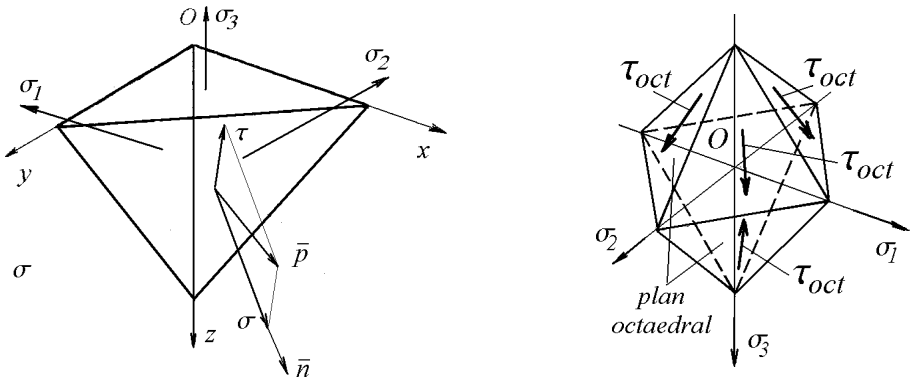
Înlocuind aceste valori în expresia (9.21, *b*) se obține formula tensiunii tangențiale octaedrale

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]^{1/2} \tag{9.26, a}$$

Din ecuația (9.20) rezultă *tensiunea normală octaedrală*

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \tag{9.27}$$

care este egală cu *tensiunea medie*.



a b

Fig. 9.3

Față de axe de coordonate oarecare, tensiunea tangențială octaedrală are expresia

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)\right]^{1/2}. \tag{9.26, b}$$

9.1.5 Tensiuni tangențiale extreme

Ca şi în cazul tensiunilor normale, interesează valorile extreme ale tensiunilor tangențiale şi orientarea suprafețelor pe care acestea acționează.

Problema de extrem condiționat se rezolvă prin metoda multiplicatorului lui Lagrange. Se construiește funcția

$$F_2(l,m,n)=\tau^2-\lambda\left(l^2+m^2+n^2-1\right). \tag{9.28}$$

şi se scriu condiţiile ca F_2 să aibă valori extreme: $\partial F_2/\partial l=0$, $\partial F_2/\partial m=0$, $\partial F_2/\partial n=0$. Se obţine sistemul de ecuaţii algebrice

$$\begin{aligned}
&(\sigma_1-\sigma_2)^2 l m^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2 l n^2-\lambda l=0,\\
&(\sigma_2-\sigma_3)^2 m n^2+(\sigma_1-\sigma_2)^2 m l^2-\lambda m=0,\\
&(\sigma_3-\sigma_1)^2 n l^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2 n m^2-\lambda n=0.
\end{aligned} \tag{9.29}$$

Soluţiile nebanale sunt

$$\begin{aligned}
&l=0, && m=n=\frac{1}{\sqrt{2}}, && \lambda=\frac{(\sigma_2-\sigma_3)^2}{2},\\
&m=0, && n=l=\frac{1}{\sqrt{2}}, && \lambda=\frac{(\sigma_3-\sigma_1)^2}{2},\\
&n=0, && l=m=\frac{1}{\sqrt{2}}, && \lambda=\frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2}{2}.
\end{aligned} \tag{9.30}$$

Înlocuind aceşti cosinuşi directori pe rând în relaţia (9.21, *b*) se obţin tensiunile tangenţiale extreme

$$\tau_1=\frac{|\sigma_2-\sigma_3|}{2}, \qquad \tau_2=\frac{|\sigma_3-\sigma_1|}{2}, \qquad \tau_3=\frac{|\sigma_1-\sigma_2|}{2}. \tag{9.31}$$

Deoarece $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$, tensiunea tangenţială maximă este $\tau_{max}=\tau_2$.

Din valorile cosinuşilor directori (9.30) rezultă că tensiunile tangenţiale au valori extreme pe planele bisectoare ale planelor definite de direcţiile principale ale tensiunilor normale. Desigur, pe aceste plane tensiunile normale nu sunt nule.

9.2 Starea plană de tensiuni

În cazul stării plane de tensiuni, se consideră tensiuni paralele numai cu două dintre axele de coordonate, independente de una din coordonate (fig. 9.4, *a*), deci σ_y, τ_{xy}, τ_{zy} şi forţele volumice pe direcţia *y* se presupun neglijabile sau nule. Exemple sunt stările de tensiuni într-un vas cu pereţi subţiri solicitat la presiune interioară sau într-o placă plană subţire, solicitată de forţe coplanare uniform distribuite pe grosime.

9.2.1 Starea de tensiuni în jurul unui punct

Se consideră un element de volum prismatic cu baza triunghiulară situată în planul *xOz* (fig. 9.4, *b*) şi cu grosimea egală cu unitatea. Se presupun cunoscute tensiunile $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz} = \tau_{zx}$ pe feţele din planele de coordonate şi se cere calculul tensiunilor σ_α şi τ_α pe faţa *BD* înclinată cu unghiul α. De notat că unghiul α este pozitiv în sensul orar, în timp ce rotirile în planul *zOx* sunt pozitive în sens contrar.

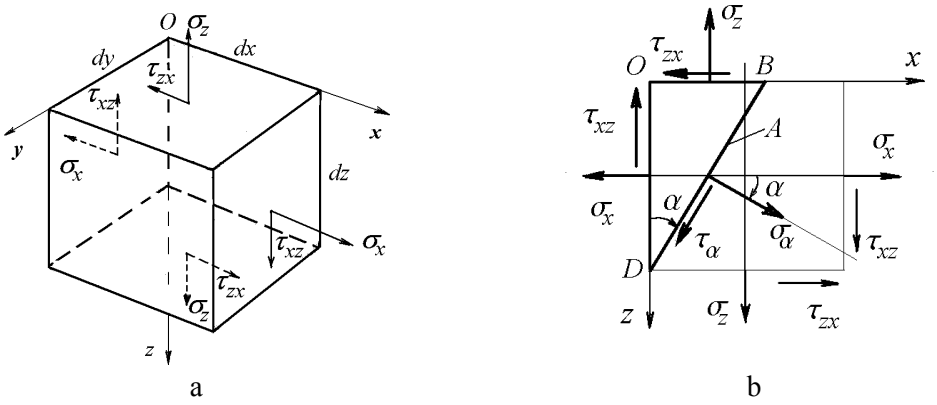


Fig. 9.4

Se notează cu *A* aria suprafeţei *BD*, deci suprafaţa *OB* are aria $A\sin\alpha$, iar suprafaţa *OD* are aria $A\cos\alpha$.

Se scriu ecuaţiile de proiecţii ale forţelor pe direcţia lui σ_α şi a lui τ_α :

$$\sigma_\alpha \, A - \sigma_x A\cos^2\alpha - \sigma_z A\sin^2\alpha - 2\tau_{xz} \, A\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

$$-\tau_\alpha \, A - \sigma_x A\cos\alpha\sin\alpha + \sigma_z A\sin\alpha\cos\alpha + \tau_{xz} A\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = 0.$$

Ecuaţia de echilibru a momentelor faţă de mijlocul feţei *BD* conduce la relaţia (3.3): $\tau_{xz} = \tau_{zx}$.

Se obţine

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_z \sin^2\alpha + 2\tau_{xz} \sin\alpha\cos\alpha, \qquad (9.32, a)$$

$$-\tau_\alpha = (\sigma_x - \sigma_z)\sin\alpha\cos\alpha - \tau_{xz}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right), \qquad (9.32, b)$$

şi, înlocuind unghiul α cu $\alpha + 90^0$,

$$\sigma_{\alpha+90^o} = \sigma_x \sin^2\alpha + \sigma_z \cos^2\alpha - 2\tau_{xz} \sin\alpha\cos\alpha. \qquad (9.32, c)$$

Relaţiile (9.32) se mai scriu

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xz}\sin 2\alpha\,, \qquad (9.33,\ a)$$

$$-\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\sin 2\alpha - \tau_{xz}\cos 2\alpha\ . \qquad (9.33,\ c)$$

9.2.2 Tensiuni principale

Valorile extreme ale tensiunii normale σ_α se obţin anulând derivata acesteia în raport cu unghiul 2α :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\alpha}{\mathrm{d}(2\alpha)} = -\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xz}\cos 2\alpha = \tau_\alpha = 0\ . \qquad (9.34)$$

Rezultă

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z}\ , \qquad (9.35)$$

relaţie care defineşte *direcţiile principale* ale tensiunilor normale.

Din relaţia (9.34) se observă că *pe feţele care au ca normale direcţiile principale, tensiunile tangenţiale sunt nule.*

Pentru $0 \le 2\alpha \le 2\pi$, între cele două soluţii $2\alpha_1$ şi $2\alpha_2$ există relaţia $2\alpha_2 = 2\alpha_1 + \pi$, $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$, deci direcţiile principale sunt perpendiculare între ele.

Înlocuind valorile unghiului α date de relaţia (9.35) în expresia (9.32) se obţin *tensiunile principale*

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}{}^2}\ . \qquad (9.36)$$

Se observă că invarianţii tensiunilor sunt în acest caz

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_z = \text{const.}\,, \qquad (9.37)$$

$$J_2 = \sigma_1\sigma_2 = \sigma_x\sigma_z - \tau_{zx}^2 = \text{const.} \qquad (9.38)$$

9.2.3 Tensiuni tangenţiale extreme

Valorile extreme ale tensiunii tangenţiale τ_α se obţin din condiţia

$$\frac{\mathrm{d}\tau_\alpha}{\mathrm{d}(2\alpha)} = -\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xz}\sin 2\alpha = 0 \qquad (9.39)$$

care se mai scrie

$$\operatorname{tg} 2\alpha' = -\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2\tau_{xz}} = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} \ . \qquad (9.40)$$

Rezultă $2\alpha' = 2\alpha_1 \pm \pi/2$, deci $\alpha' = \alpha + \pi/4$, astfel că tensiunile tangențiale extreme apar în secțiuni înclinate cu 45^0 față de direcțiile principale şi au valorile

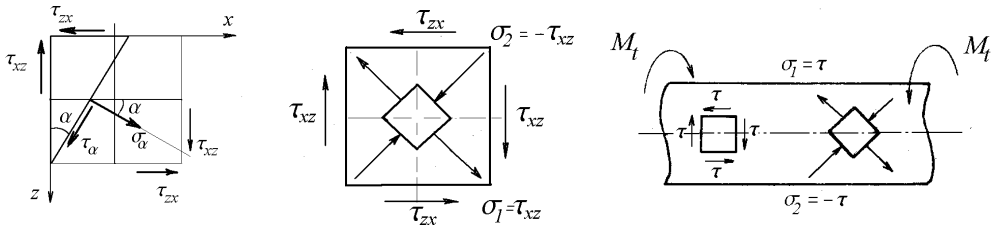
$$\tau_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^{\ 2}} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \qquad (9.41)$$

9.2.4 Cazuri particulare ale stării plane de tensiuni

Starea uniaxială de tensiuni este prezentată în paragraful 5.5. Într-o bară solicitată la întindere sau compresiune, apar tensiuni tangențiale maxime în secțiuni înclinate la 45^0 față de axa barei, ceea ce explică orientarea suprafețelor de rupere la unele materiale fragile.

Starea de forfecare pură

Se consideră un element solicitat la forfecare pură, ca în figura 9.5, *a*. Pe fețele elementului acționează numai tensiuni tangențiale.



a b c

Fig. 9.5

Rezultă că pe o suprafață înclinată cu unghiul α

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \tau_{xz}\sin 2\alpha, \\ \tau_\alpha &= \tau_{xz}\cos 2\alpha . \end{aligned} \qquad (9.42)$$

Deoarece $\operatorname{tg} 2\alpha = \infty$, $\alpha_1 = 45^0$. Pe fețele unui element orientate la 45^0 față de primul, acționează numai tensiunile normale $\sigma_{1,2} = \pm\tau_{xz}$ (fig. 9.5, *b*).

O aplicație a acestui rezultat se întâlneşte la măsurarea tensiunilor tangențiale în arbori solicitați la răsucire (fig. 9.5, *c*). Un element de volum din vecinătatea suprafeței arborelui este solicitat la forfecare pură (v. Cap. 6) dacă laturile sale sunt paralele cu generatoarele, respectiv perpendiculare pe acestea.

Un element rotit cu 45^0 este solicitat de tensiuni normale principale, egale în mărime cu tensiunile tangențiale produse de răsucire pe fețele primului element. Se înlocuieşte măsurarea lui τ cu măsurarea lui σ la 45^0 față de axa barei, ceea ce se realizează uşor cu ajutorul traductoarelor tensometrice rezistive.

Bara solicitată la încovoiere

În cazul barelor solicitate la încovoiere (fig. 9.6, *a*), $\sigma_z = 0$, deci relațiile (9.35) şi (9.36) devin

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x} \quad , \tag{9.43}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{{\sigma_x}^2 + 4{\tau_{xz}}^2} \quad , \tag{9.44}$$

unde

$$\sigma_x = \frac{M_y\, z}{I_y}, \qquad \tau_{xz} = \frac{T_z\, S_y^*}{b\, I_y} = \tau_{xz}(z).$$

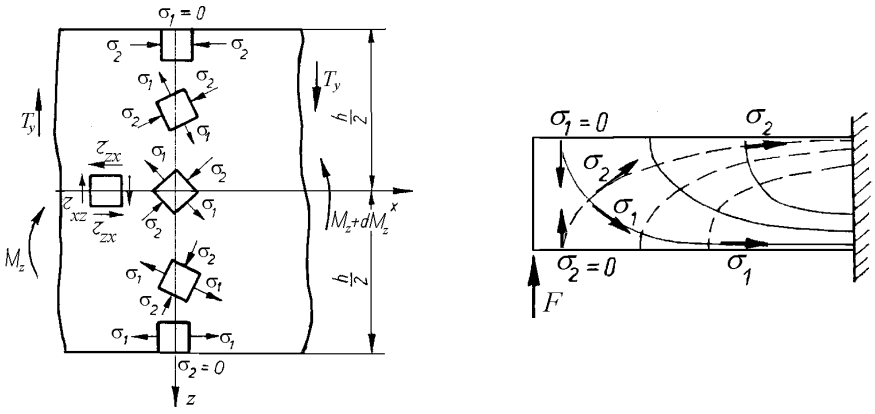


Fig. 9.6

La $z = 0$, $\sigma_x = 0$, $\alpha_{1,2} = \pm 45^{\mathrm{O}}$, $\sigma_{1,2} = \pm\tau_{xz}$, deci elementul este solicitat la forfecare pură.

La $z = \pm h/2$, $\tau_{xz} = 0$, $\alpha_{1,2} = 0^{\circ}, 90^{\circ}$, $\sigma_{1,2} = 0, \sigma_x$, deci direcțiile principale corespund cu direcțiile axelor de coordonate.

Dacă se parcurge secțiunea transversală în lungul axei *Oz*, în sens pozitiv, direcțiile principale se rotesc continuu (fig. 9.6, *a*) în sens contrar acelor de ceas. Determinând în mai multe puncte orientarea direcțiilor principale (fig. 9.6, *b*) se pot trasa *liniile izostatice*, care reprezintă înfășurătoarele tensiunilor normale principale, formând o dublă rețea de curbe ortogonale.

La armarea grinzilor din beton se urmăreşte ca armăturile din oțel să fie orientate aproximativ pe direcția liniilor izostatice.

9.2.5 Cercul lui Mohr pentru tensiuni

Relațiile (9.32) şi (9.33) se pot scrie sub forma

$$\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xz} \sin 2\alpha ,$$

$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xz} \cos 2\alpha .$$

Ridicând la pătrat şi adunând ecuațiile se obține

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \right)^2 + \tau_{xz}^2 . \qquad (9.45)$$

Aceasta este ecuația unui cerc (fig. 9.7), denumit *cercul lui Mohr*, de rază $\left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \right)^2 + \tau_{xz}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$, al cărui centru are coordonatele $\left[\frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}, 0 \right]$.

Pe cerc, unghiurile se măsoară în aceeaşi direcție în care se măsoară unghiul α în figura 9.4 (sens orar). Unghiul 2α pe cerc corespunde unui unghi α pe element. Punctele de pe cercul lui Mohr definesc stări de tensiuni pe fețele elementului din figura 9.4.

Punctul *P* are coordonatele σ_x şi τ_{xz}, egale cu tensiunile pe fața *OD*. Punctul diametral opus *Q* defineşte tensiunile pe fața *OB*, perpendiculară pe *OD*, σ_z şi τ_{zx}. Punctele P' şi Q' definesc tensiunile pe fețele rotite cu unghiul α față de axele de coordonate. Punctele P_1 şi Q_1, în care cercul intersectează axa orizontală, au abscise egale cu tensiunile principale σ_1 şi σ_2. Unghiul $2\alpha_1$ al razei *CP* cu axa absciselor corespunde direcției principale α_1, deci înclinării normalei la fața pe care acționează σ_1.

Se observă că ordonata punctului *Q* este negativă. Pentru studiul stării plane de tensiuni cu ajutorul cercului lui Mohr este necesară o *convenţie de semne modificată*, diferită de cea adoptată în Capitolul 3. Tensiunile tangenţiale care tind să producă o rotaţie în sens orar se consideră pozitive, iar cele care tind să producă o rotaţie în sens antiorar se consideră negative (sunt reprezentate de puncte situate sub axa absciselor).

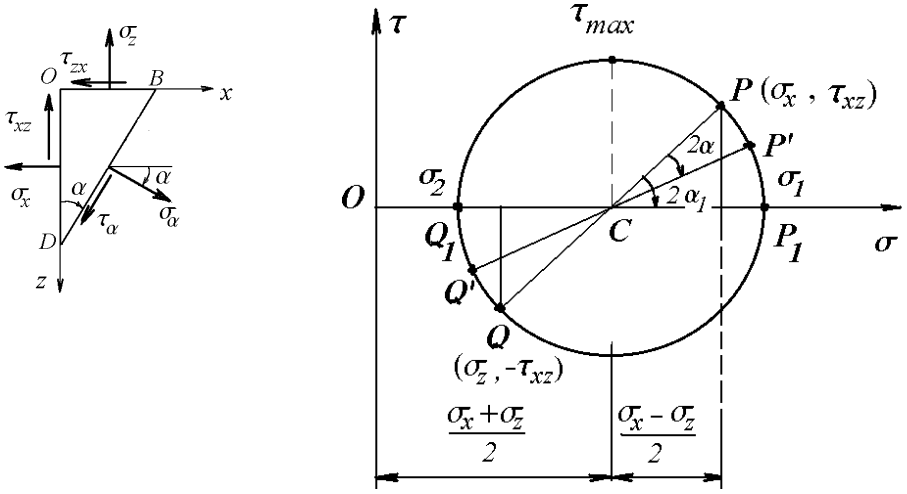


Fig. 9.7

Cercul lui Mohr se construieşte pornind de la tensiunile σ_x, σ_z, τ_{xz} care definesc punctele *P* şi *Q*. Centrul cercului *C* se află la intersecţia diametrului *PQ* cu axa absciselor. Se trasează cercul de rază *CP*, care intersectează axa orizontală în punctele P_1 şi Q_1, de abscise σ_1 şi σ_2.

9.3 Ecuaţii diferenţiale de echilibru

Fie un element de laturi *dx*, *dy* şi grosime egală cu 1 (fig. 9.8) detaşat dintr-un corp elastic solicitat mecanic. Se presupune că tensiunile σ_x, σ_y, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ şi sarcinile volumice *X*, *Y* sunt funcţii doar de *x* şi *y* (independente de *z*), iar $Z = 0$ (stare plană de tensiuni).

Variaţia tensiunilor cu poziţia se poate exprima printr-o dezvoltare în serie Taylor trunchiată. Dacă pe faţa din stânga acţionează σ_x, atunci pe faţa din dreapta, situată la distanţa d*x*, acţionează $\sigma_x + \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} \mathrm{d}x$.

Ecuația de echilibru a forțelor pe direcția x se scrie

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y - \sigma_x\,\mathrm{d}y + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x - \tau_{yx}\,\mathrm{d}x + X\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

După simplificări se obține

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0\,. \tag{9.46}$$

Similar, din ecuația de echilibru pe direcția y rezultă

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0\,. \tag{9.47}$$

Ecuațiile diferențiale de echilibru (9.46) şi (9.47) se mai numesc *ecuațiile lui Cauchy*.

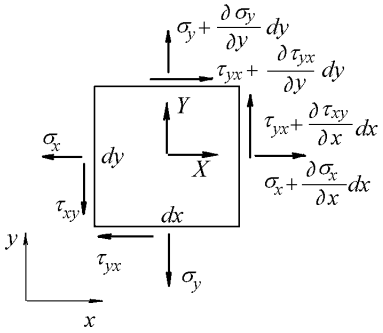


Fig. 9.8

Ecuația de momente față de centrul elementului conduce la relația de dualitate a tensiunilor tangențiale (3.3).

În cazul stării de tensiuni tridimensionale, ecuațiile diferențiale de echilibru se scriu

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0\,,\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0\,,\\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0\,,
\end{aligned} \tag{9.48}$$

la care se adaugă cele trei relații de dualitate a tensiunilor tangențiale (3.3).

Cele şase ecuații conțin nouă necunoscute, deci problemele de analiză a tensiunilor sunt *static nedeterminate* interior.

În cazul unui element situat în vecinătatea suprafeței unui corp elastic, ecuațiile de echilibru care se stabilesc între forțele de suprafață şi tensiunile interioare reprezintă *condițiile la limită*. Acestea sunt chiar ecuațiile (9.3) care

exprimă echilibrul forţelor care acţionează asupra tetraedrului din figura 9.2, dacă faţa înclinată *BCD* este pe suprafaţa corpului iar tensiunea rezultantă *p* este o sarcină pe unitatea de suprafaţă.

9.4 Starea plană de deformaţii specifice

În continuare, studiul deformaţiilor specifice se face în planul *xOy*, considerând că alungirea specifică ε_z şi lunecările specifice γ_{zx}, γ_{zy} sunt nule. Trebuie remarcat că starea plană de deformaţii specifice este asociată cu un sistem de tensiuni tridimensional, după cum starea plană de tensiuni este legată de un sistem tridimensional de deformaţii specifice. Starea plană de deformaţii specifice se realizează, de exemplu, într-un corp prismatic în care, în orice plan perpendicular pe axa longitudinală *Oz*, apar aceleaşi deformaţii. Aceasta presupune însă $\sigma_z \neq 0$.

Scopul principal este determinarea alungirilor specifice şi a lunecării specifice pe direcţiile normală şi tangenţială la un plan înclinat faţă de axele de coordonate, în funcţie de alungirile specifice ε_x, ε_y şi lunecarea specifică γ_{xy}, raportate la planele de coordonate.

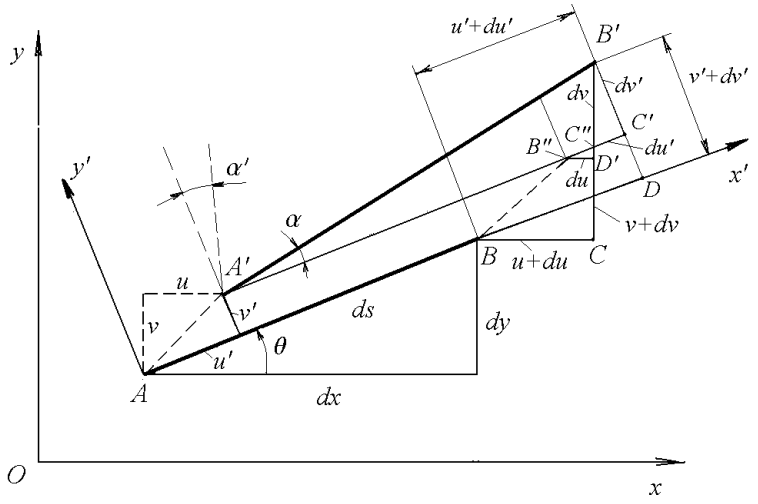


Fig. 9.9

Se consideră segmentul *AB*, de lungime *ds*, într-un corp elastic nedeformat (fig. 9.9). După deformare, *AB* se deplasează în *A'B'*. Deplasările lui *A* sunt *u* şi v,

iar deplasările lui B sunt $u+du$ şi $v+dv$. Variația deplasărilor cu poziția punctului considerat se exprimă sub forma

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\,,\qquad dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\,. \tag{9.49}$$

Se alege un sistem de axe local $x'Ay'$ cu axa Ax' în lungul lui AB şi se calculează componentele deformațiilor specifice față de acest sistem rotit cu unghiul θ față de sistemul inițial. Se trasează $A'B''=AB$ paralel cu axa Ax' şi se prelungeşte până în C', la intersecția cu $B'D$, perpendiculară pe Ax'. În noul sistem de axe, deplasările lui A sunt u' şi v', iar deplasările lui B sunt $u'+du'$ şi $v'+dv'$.

9.4.1 Alungirile specifice

Alungirea pe direcția Ax' este

$$B''C'=du'=B''D'\cos\theta+B'D'\sin\theta=du\cos\theta+dv\sin\theta\,.$$

Împărțind la ds se obține alungirea specifică

$$\varepsilon_{x'}=\frac{du'}{ds}=\frac{du}{ds}\cos\theta+\frac{dv}{ds}\sin\theta\,.$$

Înlocuind în relația de mai sus expresiile (9.49), se obține

$$\varepsilon_{x'}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right)\cos\theta+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right)\sin\theta\,,$$

apoi, înlocuind $\cos\theta=\frac{dx}{ds}$ şi $\sin\theta=\frac{dy}{ds}$, rezultă

$$\varepsilon_{x'}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)\cos\theta+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta\right)\sin\theta\,.$$

Alungirea specifică în lungul direcției înclinate cu unghiul θ față de Ox este

$$\varepsilon_{x'}=\varepsilon_{\mathrm{x}}\cos^2\theta+\varepsilon_y\sin^2\theta+\gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta \tag{9.50, a}$$

sau

$$\varepsilon_{x'}=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos2\theta+\frac{\gamma_{xy}}{2}\sin2\theta\,. \tag{9.51, a}$$

Alungirea specifică $\varepsilon_{y'}$ se obține înlocuind θ prin $\theta+\pi/2$

$$\varepsilon_{y'}=\varepsilon_{\mathrm{x}}\sin^2\theta+\varepsilon_y\cos^2\theta-\gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta\,. \tag{9.50, b}$$

9.4.2 Lunecarea specifică

Pentru calculul lunecării specifice $\gamma_{x'y'}$ se determină unghiul α cu care elementul *AB* s-a rotit față de poziția inițială (axa *Ox*')

$$\alpha \cong \mathrm{tg}\alpha \cong \frac{dv'}{ds}.$$

Deoarece

$$B'C = dv' = dv\cos\theta - du\sin\theta,$$

împărțind la *ds* se obține

$$\alpha \cong \frac{dv'}{ds} = \frac{dv}{ds}\cos\theta - \frac{du}{ds}\sin\theta,$$

apoi, înlocuind expresiile (9.49) şi $\cos\theta = \frac{dx}{ds}$, $\sin\theta = \frac{dy}{ds}$, rezultă

$$\alpha = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta\right)\cos\theta + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)\sin\theta,$$

sau

$$\alpha = \frac{\partial v}{\partial x}\cos^2\theta - \frac{\partial u}{\partial y}\sin^2\theta + \left(\varepsilon_y - \varepsilon_x\right)\sin\theta\cos\theta.$$

Analog se calculează rotirea α' a unui segment perpendicular pe *AB*

$$-\alpha' = \frac{\partial u}{\partial y}\cos^2\theta - \frac{\partial v}{\partial x}\sin^2\theta + \left(\varepsilon_y - \varepsilon_x\right)\sin\theta\cos\theta.$$

Lunecarea specifică este deci

$$\gamma_{x'y'} = \alpha - \alpha' = \gamma_{xy}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + 2\left(\varepsilon_y - \varepsilon_x\right)\sin\theta\cos\theta \qquad (9.50, c)$$

sau

$$\gamma_{x'y'} = -\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)\sin 2\theta + \gamma_{xy}\cos 2\theta. \qquad (9.51, b))$$

9.4.3 Alungiri specifice principale

Comparând relațiile (9.50) şi (9.51) cu (9.32) şi (9.33), se observă că au aceeaşi formă, primele putând fi obținute din ultimele două înlocuind σ cu ε şi τ cu $\gamma/2$.

Aceste înlocuiri se pot face în toate relațiile analoage. Astfel, *direcțiile principale ale deformațiilor specifice* (în lungul cărora $\gamma_{x'y'}=0$) se calculează din

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}. \tag{9.52}$$

Deformațiile specifice principale sunt

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}\ . \tag{9.53}$$

Lunecările specifice maxime apar în plane înclinate la 45^0 față de planele principale şi au valorile

$$\gamma_{\max} = \pm\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} = \pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \tag{9.54}$$

9.4.4 Rozeta tensometrică

Pentru determinarea completă a deformațiilor specifice într-un punct de pe suprafața unei piese, este necesară măsurarea alungirilor specifice pe trei direcții concurente în punctul respectiv. Aceasta se realizează cu ajutorul unei rozete, formate din trei traductoare tensometrice rezistive, care se lipeşte pe piesa studiată. Este convenabil ca unghiurile dintre direcțiile traductoarelor să fie 45^0 sau 60^0.

Fie ε_a, ε_b, ε_c alungirile specifice măsurate cu rozeta de 45^0 (fig. 9.10). Dacă unghiul între ε_a şi alungirea specifică principală ε_1 este θ, atunci din relația (9.50) se obține

$$\begin{aligned}
\varepsilon_a &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\cos 2\theta\ , \\
\varepsilon_b &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\cos 2\left(\theta + 45^{\circ}\right), \\
\varepsilon_c &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\cos 2\left(\theta + 90^{\circ}\right).
\end{aligned} \tag{9.55}$$

Calculând $\varepsilon_a - \varepsilon_b$ şi $\varepsilon_b - \varepsilon_c$, apoi $(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2$ şi $(\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2$, se elimină unghiul θ, rezultând alungirile specifice principale în funcție de alungirile specifice măsurate

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2}\ . \tag{9.56}$$

Unghiul θ se determină din relația

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\varepsilon_a - 2\varepsilon_b + \varepsilon_c}{\varepsilon_a - \varepsilon_c}. \qquad (9.57)$$

Valorile calculate cu relaţiile (9.56) se utilizează apoi pentru calculul tensiunilor principale.

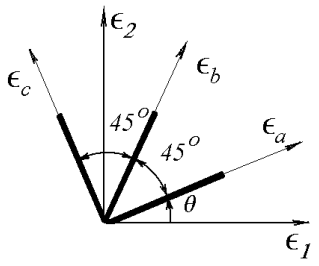


Fig. 9.10

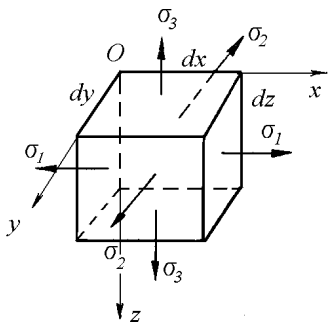


Fig. 9.11

9.5 Legea lui Hooke generalizată

Fie un element de volum paralelipipedic, având muchiile paralele cu direcţiile principale ale tensiunilor normale, pe feţele căruia acţionează tensiunile principale $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (fig. 9.11).

Tensiunea σ_1 produce alungirile specifice $\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}$ pe direcţia *Ox* şi alungirile specifice $\varepsilon_2' = -\nu \frac{\sigma_1}{E}$, $\varepsilon_3' = -\nu \frac{\sigma_1}{E}$ pe direcţiile *Oy*, respectiv *Oz*.

Analog, tensiunea σ_2 produce alungirile specifice $\varepsilon_1'' = -\nu \frac{\sigma_2}{E}$, $\varepsilon_2'' = \frac{\sigma_2}{E}$, $\varepsilon_3'' = -\nu \frac{\sigma_2}{E}$, iar tensiunea σ_3 produce alungirile specifice $\varepsilon_1''' = -\nu \frac{\sigma_3}{E}$, $\varepsilon_2''' = -\nu \frac{\sigma_3}{E}$, $\varepsilon_3''' = \frac{\sigma_3}{E}$.

Aplicând principiul suprapunerii efectelor, alungirile specifice totale pe cele trei direcţii se calculează însumând cele trei componente

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''' = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)],$$
$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2' + \varepsilon_2'' + \varepsilon_2''' = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)], \qquad (9.58)$$
$$\varepsilon_3 = \varepsilon_3' + \varepsilon_3'' + \varepsilon_3''' = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)],$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinal, iar ν este coeficientul de contracție transversală.

Relațiile (9.58) reprezintă *legea lui Hooke generalizată* raportată la direcțiile principale.

Legea lui Hooke generalizată față de axe oarecare se scrie sub forma

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)],$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], \qquad (9.59, a)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)],$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \qquad (9.59, b)$$

unde G este modulul de elasticitate transversal.

Se demonstrează că între constantele elastice E, G şi ν există relația

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \qquad (9.60)$$

Dacă în relațiile (9.59, *a*) se exprimă tensiunile în funcție de alungirile specifice, se obține

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda e,$$
$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda e, \qquad (9.61)$$
$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda e,$$

unde

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \qquad (9.62, a)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \qquad (9.63)$$

Modulul de elasticitate transversal G şi constanta λ se numesc *constantele lui Lamé.*

În cazul stării plane de tensiuni, înlocuind $\sigma_3 = 0$ în relațiile (9.58) rezultă

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\,\sigma_2), \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\,\sigma_1), \qquad \varepsilon_3 = \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2).$$

Exprimând tensiunile principale în funcție de deformațiile specifice principale, rezultă

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\,\varepsilon_2), \qquad \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\,\varepsilon_1). \tag{9.64}$$

Deoarece $\varepsilon_3 \neq 0$, rezultă că starea plană de tensiuni produce o stare tridimensională de deformații specifice.

9.6 Ecuația lui Poisson

Elementul din figura 9.11 are volumul

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

În urma deformării corpului, volumul devine

$$\mathrm{d}V + \Delta\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,(1+\varepsilon_x)\,\mathrm{d}y\,(1+\varepsilon_y)\,\mathrm{d}z\,(1+\varepsilon_z).$$

Neglijând produsele a două sau trei deformații specifice în raport cu acestea, se obține

$$\mathrm{d}V + \Delta\mathrm{d}V \cong \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z).$$

deci

$$\Delta\mathrm{d}V = \mathrm{d}V\,(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z).$$

Deformația volumică specifică (9.62, *a*) este

$$e = \frac{\Delta\mathrm{d}V}{\mathrm{d}V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\,.$$

Înlocuind deformațiile specifice prin expresiile (9.59, *a*), rezultă

$$e = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) = \frac{3(1-2\nu)}{E}\sigma_m\,. \tag{9.62, b}$$

unde *tensiunea medie*

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z). \tag{9.65}$$

Relația (9.62, *b*) se mai scrie sub forma

$$\sigma_m = \frac{E}{3\left(1-2\nu\right)} e = K\, e \tag{9.66}$$

şi se numeşte *ecuația lui Poisson*.

Constanta de proporționalitate între σ_m şi e este *modulul de elasticitate volumic* al materialului

$$K = \frac{E}{3\left(1-2\nu\right)}. \tag{9.67, a}$$

Se mai stabilesc egalitățile

$$K = \frac{2\,G\left(1+\nu\right)}{3\left(1-2\nu\right)} = \lambda + \frac{2}{3} G\,. \tag{9.67, b}$$

Din relația (9.62, *b*) rezultă că la materialele incompresibile, pentru care $e = 0$, coeficientul lui Poisson este $\nu \cong 0{,}5$. La cauciucul butil $\nu = 0{,}495$.

În cazul unui element cubic, supus la presiune "hidrostatică" p, starea de tensiuni este descrisă de $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$, $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, $\sigma_m = -p$, $e = -\dfrac{p}{K}$, deci contracția unității de volum este proporțională cu presiunea şi invers proporțională cu K.

9.7 Energia potențială de deformație la încovoiere

La elementul infinitezimal din figura 9.11, pe direcția axei Ox acționează forța $\sigma_1 \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Când aceasta creşte de la zero la valoarea nominală, produce o deformație $\varepsilon_1 \mathrm{d}x$, deci produce lucrul mecanic elementar $\dfrac{1}{2}\left(\sigma_1 \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right)\left(\varepsilon_1 \mathrm{d}x\right)$ care este egal cu energia potențială de deformație acumulată de element

$$dU = \frac{1}{2}\sigma_1 \varepsilon_1 \mathrm{d}V\,.$$

Rezultă că energia acumulată în unitatea de volum este

$$U_0 = \frac{1}{2}\sigma_1 \varepsilon_1\,.$$

Ținând seama şi de acțiunea celorlalte tensiuni σ_2 şi σ_3, se obține

$$U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3),$$

sau, utilizând legea lui Hooke generalizată (9.58), rezultă *energia de deformaţie specifică totală*

$$U_0 = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) - \frac{\nu}{E}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1). \quad (9.68)$$

Faţă de axe oarecare

$$U_0 = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x\right) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right).$$

Energia specifică de variaţie a volumului

Dacă elementul de volum este solicitat pe toate feţele de aceeaşi tensiune, deformaţia are loc numai prin variaţia volumului. Astfel, aplicând pe toate feţele tensiunea medie (9.65)

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

se produce o deformaţie volumică specifică *e*, iar *energia specifică de variaţie a volumului* este

$$U_{0v} = \frac{\sigma_m\, e}{2} = \frac{\sigma_m}{2}\frac{3(1-2\nu)}{E}\sigma_m = \frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma_m^2 = \frac{3(1-2\nu)}{2E}\frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{9},$$

deci

$$U_{0v} = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2, \quad (9.69)$$

sau

$$U_{0v} = \frac{3}{2}\sigma_m\varepsilon_m = \frac{\sigma_m^2}{2K} = \frac{1}{18K}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)^2. \quad (9.70)$$

Energia specifică de variaţie a formei

Diferenţa între energia specifică totală U_0 şi cea de variaţie a volumului U_{0v} reprezintă *energia specifică de variaţie a formei*

$$U_{0f} = U_0 - U_{0v} = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right) - \\ - \frac{1-2\nu}{6E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2$$

sau

$$U_{0f} = \frac{1+\nu}{6E}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right]. \qquad (9.71)$$

Față de axe oarecare

$$U_{0f} = \frac{1+\nu}{2E}\left[\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_x\right)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)\right].$$

În funcție de tensiunea tangențială octaedrică (9.26), energia specifică de variație a formei se scrie

$$U_{0f} = \frac{3\left(1+\nu\right)}{2E}\,\tau_{oct}^2 = \frac{3}{4G}\,\tau_{oct}^2 \qquad (9.72)$$

În cazul solicitării de întindere simplă, înlocuind $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ şi $\sigma_1 = \sigma_x$ în relația (9.71), se obține

$$U_{0f_e} = \frac{1+\nu}{3E}\,\sigma_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{6G} \qquad (9.73)$$

9.8 Compozite armate cu fibre

Un compozit stratificat, numit pe scurt *stratificat*, este realizat din straturi cu fibre sau textură înglobate într-o matrice, numite *lamine*. Lamina cu fibre unidirecționale are proprietăți longitudinale (în lungul fibrelor) superioare celor transversale. Din acest motiv laminele sunt combinate în diferite orientări pentru a obține proprietățile generale dorite.

În continuare se consideră doar stratificate simetrice față de planul median. Pentru cazul nesimetric se pot consulta tratate de specialitate [35, 64].

9.8.1 Lamina ortotropă

Se consideră o lamină cu fibre unidirecționale, solicitată la o stare plană de tensiuni. Se aleg două sisteme de coordonate, unul local - ataşat de lamină şi unul

global - ataşat de stratificat. Sistemul de axe local are axa *Ox* în lungul fibrelor şi axa *Oy* în planul laminei, perpendiculară pe fibre. Sistemul de axe global are axele *OX* şi *OY* în planul median al stratificatului simetric.

Lamina este anizotropă. În general, pentru a descrie complet un material anizotrop solicitat la o stare triaxială de tensiuni, relaţia între tensiuni şi deformaţii specifice se exprimă printr-o matrice simetrică, de dimensiuni 6×6, în care apar 21 constante elastice independente. Pentru un material ortotrop solicitat triaxial sunt necesare 9 constante elastice independente.

Pentru un material ortotrop solicitat la o stare biaxială de tensiuni, legea lui Hooke conţine 4 constante elastice independente.

9.8.1.1 Lamina cu ortotropie axată

Pentru o lamină cu fibrele orientate în direcţia globală *OX* (fig. 9.12, *a*), relaţiile între deformaţii specifice şi tensiuni sunt

$$\varepsilon_X=\frac{\sigma_X}{E_x}-\nu_{yx}\frac{\sigma_Y}{E_y},\qquad \varepsilon_Y=\frac{\sigma_Y}{E_y}-\nu_{xy}\frac{\sigma_X}{E_x},\qquad \gamma_{XY}=\frac{\tau_{XY}}{G_{xy}} \tag{9.74}$$

unde E_x şi E_y sunt modulele de elasticitate longitudinale în direcţiile *x* şi *y*, G_{xy} este modulul de elasticitate transversal în planul *xOy*, ν_{xy} şi ν_{yx} sunt coeficienţii de contracţie transversală (ν_{xy} defineşte contracţia pe direcţia *y* produsă de alungirea pe direcţia *x*).

Relaţiile (9.74) se mai scriu matriceal sub forma

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_X\\ \varepsilon_Y\\ \gamma_{XY}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1/E_x & -\nu_{yx}/E_y & 0\\ -\nu_{xy}/E_x & 1/E_y & 0\\ 0 & 0 & 1/G_{xy}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_X\\ \sigma_Y\\ \tau_{XY}\end{Bmatrix} \tag{9.75}$$

sau

$$\{\varepsilon\}=[S]\{\sigma\} \tag{9.76}$$

unde $[S]$ se numeşte *matricea de flexibilitate* a laminei sau *matricea complianţelor*.

Prin particularizare de la cazul triaxial, matricea $[S]$ se mai scrie

$$[S]=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{16}\\ S_{21} & S_{22} & S_{26}\\ S_{61} & S_{62} & S_{66}\end{bmatrix}, \tag{9.77}$$

unde elementele se determină prin identificare cu matricea din ecuaţia (9.75).

Dacă se exprimă tensiunile în funcție de deformațiile specifice, ecuațiile (9.73) devin

$$\sigma_X = \frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}\left(\varepsilon_X + \nu_{yx}\,\varepsilon_Y\right),$$

$$\sigma_Y = \frac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}\left(\varepsilon_Y + \nu_{xy}\,\varepsilon_X\right), \tag{9.78}$$

$$\tau_{XY} = G_{xy}\,\gamma_{XY}\,.$$

În formă matriceală, relațiile (9.78) se scriu

$$\begin{Bmatrix}\sigma_X\\ \sigma_Y\\ \tau_{XY}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \dfrac{\nu_{yx}E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0\\ \dfrac{\nu_{xy}E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \dfrac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0\\ 0 & 0 & G_{xy}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_X\\ \varepsilon_Y\\ \gamma_{XY}\end{Bmatrix} \tag{9.79}$$

sau

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}, \tag{9.80}$$

unde $[C]$ se numeşte *matricea de rigiditate* a laminei.

Matricea simetrică $[C]$ se mai scrie

$$[C] = \begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{16}\\ C_{21} & C_{22} & C_{26}\\ C_{61} & C_{62} & C_{66}\end{bmatrix}, \tag{9.81}$$

iar elementele se determină prin identificare cu matricea din ecuația (9.79)

Matricea de rigiditate este inversa matricei de flexibilitate

$$[C] = [S]^{-1}. \tag{9.82}$$

9.8.1.2 Lamina cu ortotropie dezaxată

Pentru o lamină cu fibrele orientate într-o direcție care face unghiul θ cu direcția globală *OX* (fig. 9.12, *b*), tensiunile şi deformațiile specifice definite în sistemul de coordonate al stratificatului trebuie exprimate în funcție de tensiunile şi deformațiile specifice în sistemul de coordonate al laminei, față de care se definesc

caracteristicile elastice. Pentru aceasta se utilizează relaţiile de transformare a tensiunilor (9.32), scrise pentru planul *xOy*, şi relaţiile de transformare a deformaţiilor specifice (9.50).

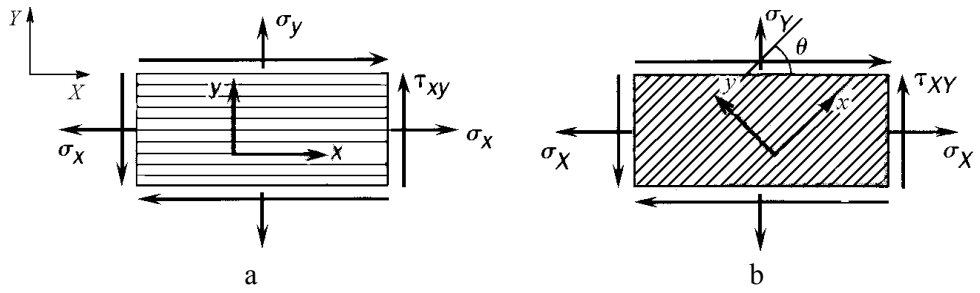


Fig. 9.12

Pentru calculul rigidităţilor faţă de direcţiile globale se procedează astfel:

1. Se determină deformaţiile specifice în direcţiile locale, în funcţie de deformaţiile specifice în direcţiile globale. Relaţiile (9.50) se scriu matriceal sub forma

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} \tag{9.83}$$

unde s-a notat $c = \cos\theta$ şi $s = \sin\theta$.

2. Se calculează tensiunile faţă de direcţiile locale în funcţie de deformaţiile specifice faţă de direcţiile locale folosind relaţiile (9.79) în care s-au înlocuit indicii cu litere mari prin indici cu litere mici

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \tag{9.84}$$

3. Se exprimă tensiunile faţă de direcţiile globale în funcţie de tensiunile faţă de direcţiile locale utilizând relaţiile (9.32) scrise pentru planul *xOy* şi în care se înlocuieşte $\alpha = -\theta$ (rotire în sens invers)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \tag{9.85}$$

Înlocuind (9.83) în (9.84) şi (9.84) în (9.85) se obțin tensiunile globale în funcție de deformațiile specifice globale

$$\begin{Bmatrix}\sigma_X\\ \sigma_Y\\ \tau_{XY}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{C}_{11} & \overline{C}_{12} & \overline{C}_{16}\\ \overline{C}_{21} & \overline{C}_{22} & \overline{C}_{26}\\ \overline{C}_{61} & \overline{C}_{62} & \overline{C}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_X\\ \varepsilon_Y\\ \gamma_{XY}\end{Bmatrix}. \tag{9.86}$$

În relația (9.86) rigiditățile globale au următoarele expresii

$$\overline{C}_{11}=B_1+B_2\cos 2\theta+B_3\cos 4\theta,\qquad \overline{C}_{12}=B_4-B_3\cos 4\theta,$$

$$\overline{C}_{22}=B_1-B_2\cos 2\theta+B_3\cos 4\theta,\qquad \overline{C}_{66}=\frac{1}{2}(B_1-B_4)-B_3\cos 4\theta, \tag{9.87}$$

$$\overline{C}_{16}=\frac{1}{2}B_2\sin 2\theta+B_3\sin 4\theta,\qquad \overline{C}_{26}=\frac{1}{2}B_2\sin 2\theta-B_3\sin 4\theta,$$

unde

$$B_1=\frac{1}{8}(3C_{11}+3C_{22}+2C_{12}+4C_{66}),\quad B_2=\frac{1}{2}(C_{11}-C_{22}),$$

$$B_3=\frac{1}{8}(C_{11}+C_{22}-2C_{12}-4C_{66}), \tag{9.88}$$

$$B_4=\frac{1}{8}(C_{11}+C_{22}+6C_{12}-4C_{66}).$$

Înlocuind constantele (9.88) în relațiile (9.87) rezultă

$$\overline{C}_{11}=C_{11}\cos^4\theta+2(C_{12}+2C_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta+C_{22}\sin^4\theta,$$

$$\overline{C}_{22}=C_{11}\sin^4\theta+2(C_{12}+2C_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta+C_{22}\,cos^4\theta,$$

$$\overline{C}_{12}=(C_{11}+C_{22}-4C_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta+C_{12}(\sin^4\theta+\cos^4\theta), \tag{9.89, *a*}$$

$$\overline{C}_{66}=(C_{11}+C_{22}-2C_{12}-2C_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta+C_{66}(\sin^4\theta+\cos^4\theta),$$

$$\overline{C}_{16}=(C_{11}-C_{12}-2C_{66})\sin\theta\cos^3\theta+(C_{12}-C_{22}+2C_{66})\sin^3\theta\cos\theta,$$

$$\overline{C}_{26}=(C_{11}-C_{12}-2C_{66})\sin^3\theta\cos\theta+(C_{12}-C_{22}+2C_{66})\sin\theta\cos^3\theta.$$

La compozite cu proprietăți superioare, deobicei E_x este mult mai mare decât E_y sau G_{xy}. Întrucât ν_{xy} şi ν_{yx} au valori relativ mici, rigiditățile pot fi aproximate după cum urmează

$$\overline{C}_{11}\cong E_x\cos^4\theta,\qquad \overline{C}_{22}\cong E_x\sin^4\theta,$$

$$\overline{C}_{12} \cong E_x \sin^2\theta \cos^2\theta\,, \qquad \overline{C}_{66} \cong E_x \sin^2\theta \cos^2\theta\,, \qquad (9.89,\ b)$$

$$\overline{C}_{16} \cong E_x \sin\theta \cos^3\theta\,, \qquad \overline{C}_{26} \cong E_x \sin^3\theta \cos\theta\,.$$

Similar, se calculează deformaţiile specifice globale în funcţie de tensiunile globale

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{S}_{11} & \overline{S}_{12} & \overline{S}_{16} \\ \overline{S}_{21} & \overline{S}_{22} & \overline{S}_{26} \\ \overline{S}_{61} & \overline{S}_{62} & \overline{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix}. \qquad (9.90)$$

În relaţia (9.90) elementele matricei de flexibilitate sunt

$$\overline{S}_{11} = D_1 + D_2 \cos 2\theta + D_3 \cos 4\theta\,, \qquad \overline{S}_{66} = 2\left(D_1 - D_4\right) - 4 D_3 \cos 4\theta\,,$$

$$\overline{S}_{22} = D_1 - D_2 \cos 2\theta + D_3 \cos 4\theta\,, \qquad \overline{S}_{12} = D_4 - D_3 \cos 4\theta\,, \qquad (9.91)$$

$$\overline{S}_{16} = D_2 \sin 2\theta + 2 D_3 \sin 4\theta\,, \qquad \overline{S}_{26} = D_2 \sin 2\theta - 2 D_3 \sin 4\theta\,,$$

unde

$$D_1 = \frac{1}{8}\left(3 S_{11} + 3 S_{22} + 2 S_{12} + S_{66}\right), \qquad D_2 = \frac{1}{2}\left(S_{11} - S_{22}\right),$$

$$D_3 = \frac{1}{8}\left(S_{11} + S_{22} - 2 S_{12} - S_{66}\right), \qquad (9.92)$$

$$D_4 = \frac{1}{8}\left(S_{11} + S_{22} + 6 S_{12} - S_{66}\right).$$

Pe baza acestora se pot calcula modulele de elasticitate ale laminei cu fibrele orientate la un unghi θ faţă de direcţiile globale

$$E_X = \frac{1}{\overline{S}_{11}}\,, \qquad E_Y = \frac{1}{\overline{S}_{22}}\,, \qquad G_{XY} = \frac{1}{\overline{S}_{66}}\,. \qquad (9.93)$$

9.8.1.3 Deformaţia laminei la întindere uniaxială

Este interesant de calculat care este forma deformată a unei platbande de compozit stratificat, solicitată la întindere uniaxială pe o direcţie înclinată faţă de fibre, dacă se cunosc E_x, E_y, ν_{xy} şi G_{xy}.

Rezultatul este dat de semnul lunecării specifice γ_{XY}. Dacă $\sigma_Y = \tau_{XY} = 0$ şi $\sigma_X > 0$, atunci din (9.90) rezultă $\gamma_{XY} = \overline{S}_{61}\sigma_X$, deci γ_{XY} are acelaşi semn ca $\overline{S}_{61}$. Pentru unghiuri θ mici

$$\bar{S}_{61} = D_2 \sin 2\theta + 2 D_3 \sin 4\theta = (2D_2 + 8D_3)\theta =$$

$$= (2 S_{11} - 2 S_{12} - S_{66})\theta = \left(2\frac{1+\nu_{xy}}{E_x} - \frac{1}{G_{xy}} \right)\theta = \left[2\left(1+\nu_{xy}\right) - \frac{E_x}{G_{xy}} \right]\frac{\theta}{E_x} < 0$$

deoarece $\frac{E_x}{G_{xy}} = 10,...,30$. Rezultă că $\gamma_{XY} < 0$ şi deci platbanda deformată are forma din figura 9.13.

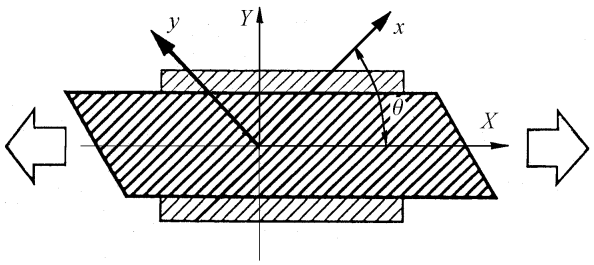


Fig. 9.13

9.8.2 Stratificatul simetric

Un stratificat simetric se comportă ca o placă anizotropă omogenă. Sub încărcări în planul stratificatului, modulele de elasticitate efective sunt medii aritmetice ale modulelor de elasticitate ale laminelor constituente. Eforturile de membrană sunt decuplate de cele de încovoiere.

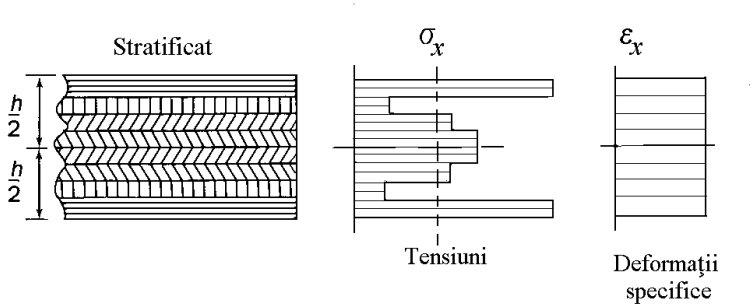


Fig. 9.14

Laminele sunt lipite una de alta, astfel că atunci când sunt solicitate mecanic ele au aceleaşi deformații specifice. Deoarece rigiditățile laminelor sunt diferite, tensiunile în lamine diferă (fig. 9.14).

9.8.2.1 Tensiuni şi deformații specifice la încărcări coplanare

Pentru caracterizarea stării de tensiuni într-un stratificat simetric se folosesc tensiuni medii. Acestea se definesc prin relațiile

$$\overline{\sigma}_X = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_X \, \mathrm{d}Z\,, \qquad \overline{\sigma}_Y = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_Y \, \mathrm{d}Z\,, \qquad \overline{\tau}_{XY} = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{XY} \, \mathrm{d}Z\,, \qquad (9.94)$$

unde *h* este grosimea stratificatului.

În formă matriceală

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix} = \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix} dZ = \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \overline{C}_{11} & \overline{C}_{12} & \overline{C}_{16} \\ \overline{C}_{21} & \overline{C}_{22} & \overline{C}_{26} \\ \overline{C}_{61} & \overline{C}_{62} & \overline{C}_{66} \end{bmatrix} dZ \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix}, \quad (9.95)$$

unde $[A]$ este matricea de rigiditate a stratificatului.

Primul element al matricei de rigiditate are expresia

$$A_{11} = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} \overline{C}_{11} \, \mathrm{d}Z = \frac{2}{h}\int_{0}^{h/2} \overline{C}_{11} \, \mathrm{d}Z\,. \qquad (9.96, a)$$

În cadrul unei lamine, coeficienții $\overline{C}_{ij}$ sunt constanți. Integrala (9.96, *a*) poate fi înlocuită printr-o sumă

$$A_{11} = \frac{2}{h}\sum_i \overline{C}_{11}^i \, \mathrm{d}Z = \frac{2}{h}\sum_i \overline{C}_{11}^i \, h_i = \sum_i \overline{C}_{11}^i \left(\frac{2h_i}{h}\right). \qquad (9.96, b)$$

Matricea de rigiditate pentru un stratificat simetric se poate obține adunând termenii corespunzători ai matricei de rigiditate pentru fiecare lamină înmulțiți cu *procentul volumic* $v_i = \dfrac{2h_i}{h}$ în lamina *i*

$$[A] = \sum_i v_i \left[\overline{C}^i\right]. \qquad (9.97)$$

După ce se calculează matricea $[A]$, aceasta poate fi inversată pentru a obține matricea de flexibilitate a stratificatului $[a] = [A]^{-1}$. Valorile modulelor de elasticitate pentru stratificat se pot calcula cu relațiile

$$E_X = \frac{1}{a_{11}} = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}, \qquad E_Y = \frac{1}{a_{22}} = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{11}}, \qquad (9.98)$$

$$G_{XY} = \frac{1}{a_{66}} = A_{66}, \qquad \nu_{XY} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{A_{21}}{A_{22}}, \qquad \nu_{YX} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{A_{12}}{A_{11}}.$$

Într-un calcul aproximativ, elementul A_{11} al matricei de rigiditate se poate scrie

$$A_{11} \cong E_x \sum_i v_i \cos^4\theta_i, \qquad (9.99)$$

unde v_i este procentul volumic al laminei cu fibre înclinate la θ_i în stratificat.

Modulul de elasticitate longitudinal al stratificatului poate fi aproximat prin relația

$$E_X \cong \sum_i v_i \, E_{x\mathrm{i}} \cos^4\theta_i, \qquad (9.100)$$

unde E_{xi} este modulul de elasticitate al stratificatului cu fibre înclinate cu unghiul θ_i şi procent volumic v_i.

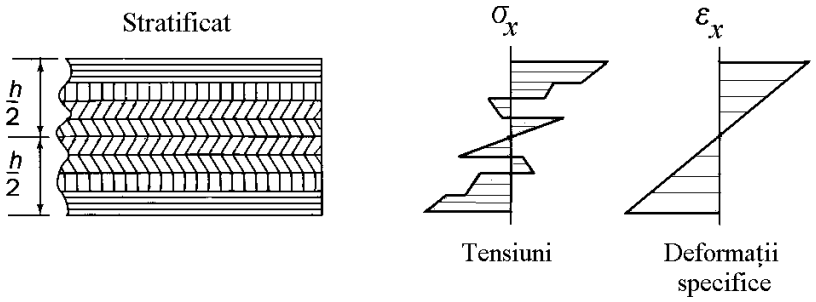


Fig. 9.15

9.8.2.2 Tensiuni şi deformații specifice la încovoiere

Dacă un stratificat simetric este solicitat la încovoiere, deformațiile specifice au o distribuție liniară (fig. 9.15) dar tensiunile au o variație neliniară cu salturi, datorită rigidităților diferite ale laminelor componente.

O analiză similară cu cea din paragraful precedent arată că termenii matricei de rigiditate a stratificatului au forma

$$D_{11} = \sum_i \overline{C}_{11}^{\,i} \left(\frac{I_i}{I_{tot}} \right), \qquad (9.101)$$

unde I_i şi I_{tot} sunt momentele de inerție axiale ale laminei *i,* respectiv ale stratificatului. Prin inversarea matricei $[D]$ se obține matricea de flexibilitate a stratificatului şi apoi constantele elastice echivalente ale stratificatului.

9.9 Tensiuni termice

Un corp elastic neconstrâns, încălzit uniform, se dilată liber. Variația temperaturii produce alungiri specifice fără să apară tensiuni normale. Încălzirea uniformă nu produce lunecări specifice şi nici tensiuni tangențiale. În corpurile din materiale izotrope apar tensiuni termice dacă dilatarea produsă de încălzire uniformă este împiedicată sau dacă încălzirea produce un câmp neuniform de temperaturi. Tensiuni termice apar şi în materiale anizotrope chiar într-un câmp uniform de temperaturi.

În general, se consideră că tensiunile termice nu influențează câmpul de temperaturi, alungirile specifice calculându-se prin suprapunere liniară, adăugând alungirile specifice termice la cele datorite tensiunilor normale produse de sarcinile exterioare. În cazul stării plane de tensiuni, relațiile (9.59) devin

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\,\sigma_y\right) + \alpha T\,,$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\,\sigma_x\right) + \alpha T\,, \qquad (9.102)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}\,,$$

unde $T(x,y)$ este variația temperaturii iar α este coeficientul de dilatare termică liniară.

În termoelasticitate, ecuațiile diferențiale de echilibru (9.46) şi (9.47), relațiile între deformații specifice şi deplasări (3.20) şi deci ecuația de compatibilitate (3.21), ca şi condițiile la limită (9.3) rămân nemodificate, fiind bazate pe considerente pur mecanice sau geometrice.

Înlocuind deformațiile specifice (9.102) în ecuația de compatibilitate (3.21), ținând cont de ecuațiile de echilibru (9.46) şi (9.47) în care se neglijează forțele volumice, se obține o ecuație de compatibilitate exprimată în tensiuni

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\sigma_x + \sigma_y + \alpha E T\right) = 0\,. \qquad (9.103)$$

Exemplul 9.1

Se consideră bara de secțiune dreptunghiulară din figura 9.16, *a*, liberă la capete, supusă unei variații de temperatură $T(y)=\frac{T_0}{4}\left(3-\frac{2y}{c}-\frac{y^2}{c^2}\right)$, la care se calculează distribuția tensiunilor termice pe înălțimea secțiunii.

Deoarece $\sigma_y=\tau_{xy}=0$, $\sigma_x=\sigma_x(y)$, ecuația (9.103) devine

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}(\sigma_x+\alpha E T)=0, \tag{9.104}$$

de unde rezultă

$$\sigma_x=-\alpha E T+c_1 y+c_2. \tag{9.105}$$

Constantele de integrare se determină din condițiile la limită la capete. La $x=\pm L$ forța axială şi momentul încovoietor trebuie să fie nule

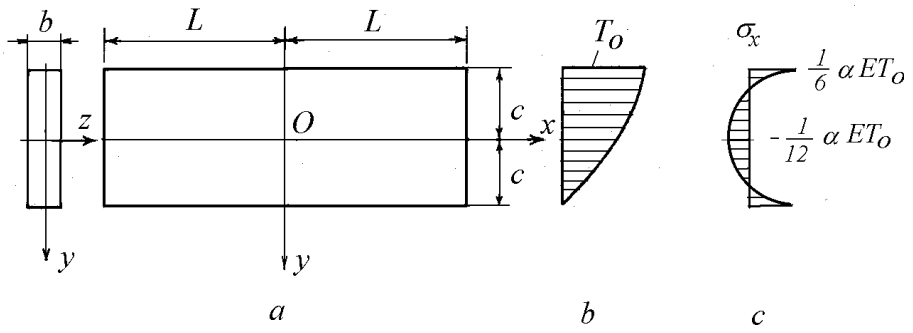
$$\int_{-c}^{c}\sigma_x b\,\mathrm{d}y=0, \qquad \int_{-c}^{c}\sigma_x y b\,\mathrm{d}y=0. \tag{9.106}$$

Înlocuind expresia (9.105) în relațiile (9.106) rezultă

$$c_1=\frac{3}{2c^3}\int_{-c}^{c}\alpha E T y\,\mathrm{d}y, \quad c_2=\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c}\alpha E T\,\mathrm{d}y. \tag{9.107}$$

Dacă se notează momentul de inerție axial $I_z=2c^3b/3$ şi aria $A=2bc$, se obține relația generală de calcul al tensiunilor termice

$$\sigma_x=\alpha E\left(-T+\frac{b}{A}\int_{-c}^{c}T\,\mathrm{d}y+\frac{y}{I_z}\int_{-c}^{c}T y\,\mathrm{d}y\right). \tag{9.108}$$



a *b* *c*

Fig. 9.16

Pentru distribuția de temperaturi din figura 9.16, *b* se obține

$$\sigma_x = \alpha E\left[-\frac{T_0}{4}\left(3-\frac{2y}{c}-\frac{y^2}{c^2}\right)+\frac{2T_0}{3}-\frac{T_0}{2}\frac{y}{c}\right]=-\alpha E\,\frac{T_0}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{y^2}{c^2}\right).$$

Distribuția tensiunilor termice este ilustrată în figura 9.16, *c*.

9.10 Tensiuni de contact

Pe suprafețele de contact a două corpuri în interacțiune mecanică se dezvoltă presiuni de valori relativ mari. Exemple tipice sunt rulmenții, dinții roților în agrenare, mecanismele cu came, roțile de tren pe șina de cale ferată și rulourile de rezemare ale podurilor. Suprafețele de contact fiind foarte mici, forțele de compresiune produc presiuni și tensiuni de contact relativ mari. Problema este studiată cu metodele Teoriei elasticității (teoria lui Hertz), interesând atât presiunile de contact cât și tensiunile în vecinătatea zonei de contact.

Starea de tensiuni într-o bilă de rulment, în vecinătatea zonei de contact, este de compresiune triaxială, solicitare la care materialul rezistă mai bine decât la compresiune simplă, astfel încât pentru un oțel OL37, cu limita de curgere la compresiune uniaxială $\sigma_c = 210\,\text{MPa}$, se admite o presiune admisibilă de 760 MPa, iar la oțelul de rulmenți presiunea de contact admisibilă ajunge la 3800 MPa.

Se demonstrează că, în lungul liniei perpendiculare pe suprafața de contact, tensiunile tangențiale au valori maxime la o mică distanță de zona de contact, și nu la suprafața piesei în contact cu bila. Aceasta explică ruperile locale care duc la exfolieri, cojiri, desprinderi ("spalling") și defecte punctiforme ("pitting"), generate de fisuri inițiate la adâncimi de ordinul a 100 μm sau chiar mai mici, în special în inelele rulmenților.

În cazul unei bile de diametru *D*, apăsate cu o forță *F* pe o suprafață plană (fig. 9.17), raza cercului de contact are valoarea

$$r = 0{,}88\left(\frac{FD}{E}\right)^{1/3}, \tag{9.109}$$

unde *E* este modulul de elasticitate longitudinal al celor două materiale (considerat același).

Presiunea maximă în centrul suprafeței de contact este

$$p_{max} = 0{,}62\left(\frac{FE^2}{D^2}\right)^{1/3}. \tag{9.110}$$

În cazul unui cilindru de diametru D şi lungime l, apăsat cu o forţă F pe o suprafaţă plană (fig. 9.18) din acelaşi material, lăţimea suprafeţei dreptunghiulare de contact are valoarea

$$2b = 2{,}15\left(\frac{FD}{El}\right)^{1/2}, \tag{9.111}$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinal al celor două materiale.

Presiunea de contact are o distribuţie eliptică, valoarea maximă fiind

$$p_{max} = 0{,}59\left(\frac{FE}{lD}\right)^{1/2}. \tag{9.112}$$

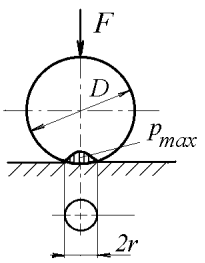


Fig. 9.17

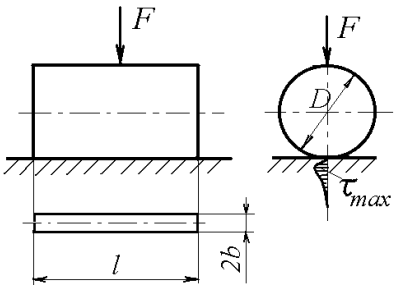


Fig. 9.18

În cazul contactului a două sfere de diametru d_1, respectiv d_2, dimensiunile suprafeţei de contact şi valoarea maximă a presiunii de contact se obţin din relaţiile (9.109) şi (9.110), înlocuind diametrul D prin $d_1 d_2/(d_1 + d_2)$. Pentru o bilă de diametru d_1 apăsată în interiorul unei suprafeţe sferice de diametru $d_2 > d_1$, se înlocuieşte diametrul D prin $d_1 d_2/(d_2 - d_1)$.

În cazul contactului a doi cilindri paraleli, de diametru d_1, respectiv d_2, lăţimea suprafeţei de contact şi valoarea maximă a presiunii de contact, se obţin din relaţiile (9.111) şi (9.112), înlocuind diametrul D prin $d_1 d_2/(d_1 + d_2)$. Pentru materiale cu coeficientul de contracţie transversală $\nu = 0{,}3$ tensiunea tangenţială maximă apare la o distanţă $0{,}78\,b$ de suprafaţa de contact, având valoarea $\tau_{max} = 0{,}304\,p_{max}$ [61].

Relaţiile de mai sus sunt valabile atunci când dimensiunile suprafeţei de contact sunt mici în comparaţie cu raza bilei sau a cilindrului, când materialele sunt liniar-elastice fără să se depăşească limita de proporţionalitate şi când pe suprafaţa de contact acţionează numai forţe normale, nu şi forţe tangenţiale.

10.
TEORII DE REZISTENȚĂ

La o bară solicitată la întindere uniaxială, *ruperea* se produce atunci când tensiunea normală atinge valoarea σ_r, *curgerea* se produce când tensiunea normală are valoarea σ_c, atingerea limitei de elasticitate se produce la valoarea σ_e etc. Toate acestea pot fi considerate *stări limită*.

În cazul pieselor supuse la stări plane sau spațiale de tensiuni, se pune problema determinării condițiilor în care se atinge o anumită stare limită. Deoarece stările limită se definesc prin valori ale tensiunilor determinate experimental, prin încercarea la tracțiune a epruvetelor solicitate unidirecțional, interesează *în ce condiții o stare plană sau spațială de tensiuni produce într-o piesă o stare limită analogă celei realizate la întinderea uniaxială.*

În limitele comportării elastice a unui material, o anumită stare limită (de exemplu limita de elasticitate) poate fi definită prin cinci mărimi caracteristice:

a) tensiunea de întindere, σ_e;

b) alungirea specifică, $\varepsilon_e = \dfrac{\sigma_e}{E}$;

c) tensiunea tangențială maximă, $\tau_e = \dfrac{\sigma_e}{2}$;

d) energia specifică de deformație totală, $U_{0e} = \dfrac{\sigma_e^2}{2E}$;

e) energia specifică de deformație pentru variația formei, $U_{0f_e} = \dfrac{1+\nu}{3E}\sigma_e^2$,

unde E este modulul de elasticitate longitudinal iar ν este coeficientul de contracție transversală.

La solicitarea de întindere simplă este suficientă una singură dintre aceste mărimi pentru definirea stării de solicitare, deci a stării limită, deoarece ele sunt atinse simultan.

La solicitarea pe mai multe direcții, atingerea valorii corespunzătoare unei anumite stări limită pentru una dintre cele cinci mărimi (ce definesc o asemenea stare) nu coincide cu atingerea simultană a valorilor corespunzătoare acelei stări pentru celelalte patru mărimi. Definind starea tridimensională de tensiuni dintr-un punct prin tensiunile principale σ_1, σ_2, σ_3, se pune problema: ce relație trebuie să existe între acestea pentru a se atinge una dintre cele cinci mărimi caracteristice ale stării limită.

Teoriile de rezistență (numite şi *teorii ale stărilor limită*) permit stabilirea acestor relații prin care se defineşte o tensiune echivalentă σ_{ech} a stării plane sau spațiale, care este comparată cu tensiunea la starea limită de la întinderea uniaxială.

10.1 Teoriile clasice de rezistență

I. ***Teoria tensiunii normale maxime*** (Rankine)

Conform teoriei I, *într-un corp supus la o stare plană sau spațială de tensiuni, starea limită se atinge atunci când tensiunea normală maximă din corp devine egală cu tensiunea normală a stării limită de la solicitarea de întindere uniaxială.*

De exemplu, limita de elasticitate se atinge atunci când

$$\sigma_1 = \sigma_e ,$$

deci tensiunea echivalentă este

$$\sigma_{ech\,\mathrm{I}} = \sigma_1 . \qquad (10.1)$$

II. ***Teoria alungirii specifice maxime*** (Saint Venant)

Conform teoriei a II-a, *într-un corp supus la o stare plană sau spațială de tensiuni, starea limită se atinge atunci când alungirea specifică maximă din corp devine egală cu alungirea specifică corespunzătoare stării limită de la solicitarea de întindere uniaxială*.

În cazul limitei de elasticitate,

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right] = \varepsilon_e = \frac{\sigma_e}{E} ,$$

deci tensiunea echivalentă, care se compară cu σ_e, este

$$\sigma_{ech\,\mathrm{II}} = \sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right). \qquad (10.2)$$

III. ***Teoria tensiunii tangențiale maxime*** (Coulomb, Guest, Tresca)

Conform teoriei a III-a, *într-un corp supus la o stare plană sau spațială de tensiuni, starea limită se atinge atunci când tensiunea tangențială maximă devine egală cu tensiunea tangențială maximă corespunzătoare stării limită de la solicitarea de întindere uniaxială*.

Luând ca stare limită atingerea limitei de elasticitate, se poate scrie

$$\tau_{max} = \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_e = \frac{\sigma_e}{2},$$

iar tensiunea echivalentă este

$$\sigma_{ech\,\mathrm{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 . \qquad (10.3)$$

IVa. ***Teoria energiei totale de deformație*** (Beltrami, Haigh)

Conform teoriei a IV-a, varianta *a*, *într-un corp supus la o stare plană sau spațială de tensiuni, starea limită se atinge atunci când energia de deformație specifică totală egalează energia de deformație specifică totală corespunzătoare stării limită de la solicitarea de întindere uniaxială*.

La limita de elasticitate, utilizând relația (9.68), se obține

$$U_0 = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right) = U_{0e} = \frac{\sigma_e^2}{2E},$$

astfel că tensiunea echivalentă este

$$\sigma_{ech\,\mathrm{IV}a} = \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right]^{1/2}, \qquad (10.4)$$

relație care, la materiale tenace, se aplică atunci când tensiunea medie este pozitivă, $\sigma_m = \frac{1}{3}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right) > 0$.

IVb. ***Teoria energiei de variație a formei*** (Huber, Hencky, von Mises)

Conform teoriei a IV-a, varianta *b*, *într-un corp supus la o stare plană sau spațială de tensiuni, starea limită se atinge atunci când energia specifică de variație a formei egalează energia specifică de variație a formei corespunzătoare stării limită de la solicitarea de întindere uniaxială.*

În cazul limitei de elasticitate

$$U_{0f} = \frac{1+\nu}{6E}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right] = U_{0f_e} = \frac{1+\nu}{6E}\,2\sigma_e^2,$$

deci tensiunea echivalentă are expresia

$$\sigma_{ech\,\mathrm{IV}b} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]^{1/2}, \qquad (10.5)$$

Această teorie se aplică atunci când tensiunea medie $\sigma_m < 0$.

Deoarece energia specifică de variație a formei se exprimă convenabil în funcție de tensiunile tangențiale octaedrale

$$U_{0f} = \frac{3}{4G}\tau_{oct}^2,$$

teoria a IV-a, varianta *b*, cunoscută ca *teoria lui von Mises*, se mai numeşte şi *teoria tensiunii tangențiale octaedrale maxime*.

Aplicarea teoriilor de rezistență se face diferit la materiale *tenace* şi la materiale *fragile*. Astfel, la materialele tenace se recomandă utilizarea relațiilor date de teoriile a III-a şi a IV-a, varianta *b*, iar la materiale fragile, utilizarea teoriei a II-a. În primul caz se formulează *criterii de curgere*, iar la materiale fragile se folosesc *criterii de rupere*. Totuşi este cunoscut faptul că o clasificare netă a materialelor în tenace şi fragile este dificilă, deoarece nu există o graniță clară între cele două tipuri de comportări, care depind de temperatură, viteza de încărcare, tipul solicitării şi condițiile de mediu ambiant. În plus, ruperile fragile se studiază în cadrul altei discipline, denumite *Mecanica ruperii*.

10.2 Criterii de curgere

În cazul materialelor tenace, se consideră o comportare liniară până la atingerea limitei de curgere σ_c şi se alege *curgerea* drept stare limită.

Experiențele au arătat că la metale ductile teoriile bazate pe tensiunea tangențială maximă sau pe tensiunea tangențială octaedrală oferă o bază pentru predicția apariției curgerii. Astfel s-au elaborat *criteriile de curgere*.

10.2.1 Criteriul lui Tresca

Curgerea, conform acestui criteriu, *începe atunci când tensiunea tangențială maximă din corp atinge valoarea la care începe curgerea la întinderea sau compresiunea uniaxială*, deci când

$$\tau_{max} = 0{,}5\,\sigma_c. \qquad (10.6)$$

Se presupune că τ_{max} este acelaşi la întindere şi la compresiune.

Experiențele au arătat că, la metalele cu comportare "elastică - perfect plastică", limita de curgere la forfecare este într-adevăr $\tau_c = 0{,}5\,\sigma_c$. Dar la unele materiale ductile, limita de curgere la forfecare, măsurată pentru starea de forfecare pură într-o încercare la răsucire, este $\tau_c = 0{,}577\,\sigma_c$, deci cu 15% mai mare decât valoarea prezisă de criteriul Tresca. Rezultă că acest criteriu este *acoperitor*, deoarece prezice apariția curgerii la sarcini inferioare celor care o produc în realitate.

De notat că analiza stării de forfecare pură arată că tensiunea tangențială maximă este egală cu tensiunile normale principale care apar la 45^0. Ar trebui deci, conform teoriei tensiunii normale maxime, ca limita de curgere la forfecare să fie egală cu limita de curgere la întindere, ceea ce contrazice experiența. Rezultă că teoria I-a de rezistență nu este aplicabilă la materiale tenace.

10.2.2 Criteriul von Mises

Curgerea, conform acestui criteriu, *începe atunci când tensiunea tangențială octaedrică din corp atinge valoarea la care începe curgerea în cazul încercării la tracțiune.*

Aceasta are loc atunci când energia de deformație specifică pentru variația formei atinge valoarea la care începe curgerea în cazul solicitării la întindere uniaxială, deci când

$$\frac{3}{4G}\tau_{oct}^2 = \frac{1}{6G}\sigma_c^2$$

sau atunci când

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_c = 0{,}471\sigma_c\,. \qquad (10.7)$$

Deci curgerea, conform criteriului *von Mises*, în orice punct al unei piese solicitate la o stare complexă de tensiuni, *începe atunci când tensiunea tangențială octaedrică din corp devine egală cu* $0{,}471\sigma_c$*, unde* σ_c *este limita de curgere a materialului, determinată prin încercarea la tracțiune.*

De fapt, deoarece expresia energiei de deformație este independentă de semnul încărcării uniaxiale (întindere sau compresiune), criteriul lui *von Mises* este valabil şi la materiale cu limita de curgere diferită la întindere şi compresiune.

10.3 Criterii de rupere la materiale fragile

În cazul materialelor fragile, nu este suficientă o singură teorie de rezistență pentru a descrie ruperea. Teoria tensiunii normale maxime dă rezultate bune doar când tensiunea normală cu valoarea absolută cea mai mare este de întindere. În caz contrar, se utilizează alte criterii.

10.3.1 Criteriul Coulomb-Mohr

Ruperea, conform acestui criteriu, *apare atunci când o anumită combinație a tensiunii normale şi tensiunii tangențiale care acționează pe un plan în material atinge o valoare critică dată de*

$$|\tau| + \mu\sigma = \tau_i\,, \tag{10.8}$$

unde μ şi τ_i sunt constante de material.

Criteriul Coulomb-Mohr poate fi considerat un criteriu al tensiunii tangențiale, în care tensiunea tangențială limită creşte la valori mari ale compresiunii "hidrostatice".

Dacă se notează $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{1}{\mu}$, atunci se demonstrază că $\dfrac{\varphi}{2}$ este orientarea față de direcțiile principale a planului de rupere pe care acționează tensiunile

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \left|\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right| \cos\varphi\,, \qquad |\tau'| = \left|\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right| \sin\varphi\,, \tag{10.9}$$

unde σ_1 şi σ_2 sunt tensiunile normale principale.

Din condiția (10.8) rezultă

$$|\sigma_1 - \sigma_2| + m\,(\sigma_1 + \sigma_2) = 2\,\tau_u\,, \tag{10.10}$$

unde noile constante sunt

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} = \cos\varphi\,, \quad \tau_u = \frac{\tau_i}{\sqrt{1+\mu^2}} = \tau_i \sin\varphi\,. \tag{10.11}$$

Se arată că rezistențele de rupere la tracțiune şi compresiune sunt date de

$$\sigma_{ut} = \frac{2\,\tau_u}{1+m}\,, \qquad \sigma_{uc} = -\frac{2\,\tau_u}{1-m}\,. \tag{10.12}$$

Eliminând τ_u între expresiile (10.12) se obține o relație între rezistențele de rupere la tracțiune şi compresiune

$$\sigma_{ut} = -\frac{1-m}{1+m}\sigma_{uc}, \tag{10.13}$$

deci constanta *m* este

$$m = \frac{\sigma_{uc} + \sigma_{ut}}{\sigma_{uc} - \sigma_{ut}}. \tag{10.14}$$

Pentru $m > 0$, rezistența la tracțiune este mai mică decât cea la compresiune, ceea ce se observă experimental la materialele fragile.

Locul geometric al punctelor care definesc ruperea, pentru starea plană de tensiuni, poate fi reprezentat prin linia poligonală continuă din figura 10.1.

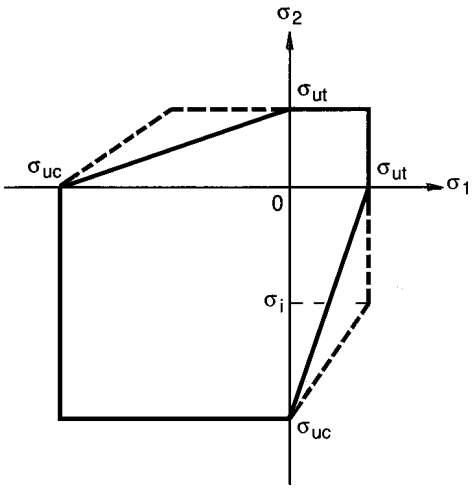


Fig. 10.1

Se constată că planele de rupere prezise de criteriul Coulomb-Mohr sunt incorecte, atât pentru o încercare uniaxială la întindere, cât şi pentru o încercare la torsiune, ele fiind orientate la unghiuri $\varphi/2$ față de planele reale de rupere.

10.3.2 Criteriul Mohr modificat

Pentru a evita erorile menționate mai sus, s-a elaborat *criteriul lui Mohr modificat*. Acesta este o combinație a *criteriului tensiunii normale maxime*, utilizat la stări de tensiuni dominate de întindere şi a *criteriului Coulomb-Mohr*, utilizat la stări de tensiuni dominate de compresiune.

În diagrama locului geometric de rupere (fig. 10.1), punctele care diferă de criteriul Coulomb-Mohr se află pe liniile întrerupte.

În relația (10.10), constanta *m* devine

$$m = \frac{\sigma_{uc} + \sigma_{ut} + \sigma_i}{\sigma_{uc} - \sigma_{ut} - \sigma_i}, \tag{10.15}$$

unde σ_i definește tensiunea la care cele două criterii coincid. Uneori se alege $\sigma_i = -\sigma_{ut}$, alteori calculul se face pe baza înclinării planului de rupere în încercările la compresiune.

A doua relație (10.12) devine

$$\sigma_{uc} = -\frac{2\tau'_u}{1-m}. \tag{10.16}$$

unde τ'_u diferă de rezistența la forfecare pură τ_u.

De notat că, solicitate la compresiune "hidrostatică" de valori mari, materialele fragile pot avea o comportare ductilă, ruperea având loc la tensiuni mai mari.

10.4 Aplicarea teoriilor de rezistență la stări plane de tensiuni

Înlocuind $\sigma_3 = 0$ în relațiile (10.1)-(10.5), se obțin formulele tensiunii normale echivalente în funcție de tensiunile principale şi coeficientul de contracție transversală

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ech\ \mathrm{I}} = \sigma_1, \\
&\sigma_{ech\ \mathrm{II}} = \sigma_1 - \nu\sigma_2, \\
&\sigma_{ech\ \mathrm{III}} = \sigma_1 - \sigma_2, \\
&\sigma_{ech\ \mathrm{IV}a} = \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2\right)^{\frac{1}{2}}, \\
&\sigma_{ech\ \mathrm{IV}b} = \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{10.17}$$

Dacă drept stare limită se alege starea corespunzătoare rezistenței admisibile σ_a, atunci calculul de verificare se face impunând condiția

$$\sigma_{ech} \le \sigma_a. \tag{10.18}$$

10.5 Aplicarea teoriilor de rezistență la bare

În cazul particular al barelor, înlocuind $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_z = 0$ şi $\tau_{xz} = \tau$ în relația (9.36) se obțin expresiile tensiunilor principale

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} ,$$

care, prin substituire în relațiile (10.9), conduc la formulele tensiunii echivalente

$$\begin{aligned}
\sigma_{ech\ \mathrm{I}} &= \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} , \\
\sigma_{ech\ \mathrm{II}} &= \frac{1-\nu}{2} + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} , \\
\sigma_{ech\ \mathrm{III}} &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} , \\
\sigma_{ech\ \mathrm{IV}a} &= \sqrt{\sigma^2 + 2(1+\nu)\tau^2} , \\
\sigma_{ech\ \mathrm{IV}b} &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} .
\end{aligned} \qquad (10.19)$$

În prezent există şi alte teorii de rezistență, însă nici una nu poate descrie comportarea tuturor materialelor în orice stare de solicitare.

10.6 Criteriul Tsai-Hill pentru compozite stratificate

Rezistența unui compozit stratificat este determinată de rezistența laminelor componente. Un criteriu de rupere utilizat la compozite este *criteriul Tsai-Hill*. Acesta este bazat pe criteriul von Mises (teoria energiei de deformație de variație a formei), care a fost întâi extins de Hill la corpuri anizotrope, apoi aplicat de Tsai şi Azzi la materiale compozite.

Criteriul Tsai-Hill poate fi exprimat sub forma

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{xt}}\right)^2 - \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_{xt}^2} + \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_{yt}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{xy}}{\tau_f}\right)^2 = 1 \qquad (10.20)$$

unde σ_x este tensiunea în direcția fibrelor, σ_y - tensiunea perpendiculară pe fibre, σ_{xt} - rezistența la tracțiune în direcția fibrelor, σ_{yt} - rezistența la tracțiune

perpendicular pe fibre, τ_{xy} - tensiunea tangențială în planul laminei, τ_f - rezistența la forfecare.

Deoarece relația (10.20) este definită în sistemul local de coordonate al laminei şi tensiunile se dau deobicei în sistemul global al stratificatului, trebuie utilizate relațiile de transformare prezentate în capitolul 9.

Pentru solicitări în planul stratificatului, dacă se dau tensiunile în sistemul global *XOY*, deformațiile specifice se calculează utilizând matricea de flexibilitate a stratificatului

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} = [a] \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix}. \tag{10.21}$$

Pentru încărcări în planul stratificatului, deformațiile specifice (10.21) sunt aceleaşi în toate laminele, deci pot fi utilizate pentru a calcula tensiunile, folosind matricea de rigiditate pentru fiecare lamină

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix}_i = [A]_i \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix}. \tag{10.22}$$

Relațiile (10.22), care dau tensiunile în fiecare lamină în sistemul global de axe al stratificatului, au forma (9.86)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \overline{C}_{11} & \overline{C}_{12} & \overline{C}_{16} \\ \overline{C}_{21} & \overline{C}_{22} & \overline{C}_{26} \\ \overline{C}_{61} & \overline{C}_{62} & \overline{C}_{66} \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix}. \tag{10.23}$$

Pentru a calcula tensiunile în sistemul local de axe al laminei se utilizează relațiile (9.32) scrise matriceal sub forma

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix}, \tag{10.24}$$

în care $c = \cos\theta$ şi $s = \sin\theta$, unde θ este unghiul de înclinare al fibrelor față de direcția globală *OX*.

Aceste tensiuni se utilizează în *criteriul Tsai-Hill*, care de obicei se scrie sub forma unui coeficient de siguranță

$$c=\frac{\sigma_{xt}}{\left[\sigma_x^2-\sigma_x\sigma_y+\left(\frac{\sigma_{xt}}{\sigma_{yt}}\right)^2\sigma_y^2+\left(\frac{\sigma_{xt}}{\tau_f}\right)^2\tau_{xy}^2\right]^{\frac{1}{2}}}. \qquad (10.25)$$

Acest criteriu nu se aplică în cazul ruperilor prin o serie de mecanisme specifice compozitelor, cum sunt delaminările în lungul fibrelor sau dezlipirile laminelor.

Exemplul 10.1

Un vas cilindric este fabricat dintr-un compozit stratificat, din fibre de carbon în matrice epoxy. Vasul are diametrul $D=0{,}6$ m şi grosimea peretelui $h=10$ mm. Fibrele sunt dispuse în două straturi la 45^0, două straturi la -45^0 şi şase straturi la 90^0 față de axa cilindrului. Se cere să se calculeze presiunea interioară din vas care poate produce fisurarea peretelui vasului conform criteriului Tsai-Hill. Se cunosc proprietățile laminelor: $E_x=207$ GPa, $\sigma_{xt}=1200$ MPa, $E_y=7{,}7$ GPa, $\sigma_{yt}=28$ MPa, $G_{xy}=4{,}9$ GPa, $\tau_f=43$ MPa, $\nu_{xy}=0{,}3$.

Rezolvare

Tensiunile în sistemul global (3.5) şi (3.6) sunt

$$\begin{Bmatrix}\sigma_X\\ \sigma_Y\\ \tau_{XY}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}pD/2h\\ pD/4h\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}D/2h\\ D/4h\\ 0\end{Bmatrix}p=\begin{Bmatrix}30\\ 15\\ 0\end{Bmatrix}p.$$

Matricea de rigiditate (9.79) în coordonate locale (în MPa) este

$$[C]=\begin{bmatrix}207{,}7 & 2{,}3178 & 0\\ 2{,}3178 & 7{,}7259 & 0\\ 0 & 0 & 4{,}9\end{bmatrix}\cdot 10^3.$$

Matricele de rigiditate ale straturilor în coordonate globale sunt

$$[\overline{C}]_{45^0}=\begin{bmatrix}59{,}914 & 50{,}114 & 0\\ 50{,}114 & 59{,}914 & 0\\ 0 & 0 & 52{,}696\end{bmatrix}\cdot 10^3, \qquad [\overline{C}]_{-45^0}=[\overline{C}]_{45^0},$$

$$[\overline{C}]_{0^0}=\begin{bmatrix}207{,}7 & 2{,}3178 & 0\\ 2{,}3178 & 7{,}7259 & 0\\ 0 & 0 & 4{,}9\end{bmatrix}\cdot 10^3.$$

Matricea de rigiditate (9.97) a stratificatului simetric este

$$[A]=0{,}2\cdot\left[\overline{C}\right]_{45^0}+0{,}2\cdot\left[\overline{C}\right]_{-45^0}+0{,}6\cdot\left[\overline{C}\right]_{0^0}=\begin{bmatrix}148{,}58 & 21{,}436 & 0\\ 21{,}436 & 28{,}601 & 0\\ 0 & 0 & 24{,}019\end{bmatrix}\cdot 10^3 .$$

Inversa ei este matricea de flexibilitate

$$[a]=[A]^{-1}=\begin{bmatrix}7{,}5462 & -5{,}6558 & 0\\ -5{,}6558 & 39{,}203 & 0\\ 0 & 0 & 41{,}634\end{bmatrix}\cdot 10^{-6} .$$

Deformațiile specifice (10.21) în sistemul global sunt

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_X\\ \varepsilon_Y\\ \gamma_{XY}\end{Bmatrix}=[a]\begin{Bmatrix}\sigma_X\\ \sigma_Y\\ \tau_{XY}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0{,}14155\\ 0{,}41836\\ 0\end{Bmatrix}\cdot 10^{-3}\ p .$$

Tensiunile în fiecare strat (în MPa), în sistemul global sunt

$$\begin{Bmatrix}\sigma_X\\ \sigma_Y\\ \tau_{XY}\end{Bmatrix}_{45^0}=\left[\overline{C}\right]_{45^0}\begin{Bmatrix}\varepsilon_X\\ \varepsilon_Y\\ \gamma_{XY}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}29{,}447\\ 32{,}16\\ 0\end{Bmatrix}p ,\quad \begin{Bmatrix}\sigma_X\\ \sigma_Y\\ \tau_{XY}\end{Bmatrix}_{0^0}=\left[\overline{C}\right]_{0^0}\begin{Bmatrix}\varepsilon_X\\ \varepsilon_Y\\ \gamma_{XY}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}30{,}369\\ 3{,}5603\\ 0\end{Bmatrix}p .$$

Tensiunile în sistemul local al fiecărui strat (10.24) sunt

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}_{45^0}=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}5 & 1\\ 0{,}5 & 0{,}5 & -1\\ -0{,}5 & 0{,}5 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}29{,}447\\ 32{,}16\\ 0\end{Bmatrix}p=\begin{Bmatrix}30{,}8035\\ 30{,}8035\\ 1{,}3564\end{Bmatrix}p$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}_{0^0}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}30{,}369\\ 3{,}5603\\ 0\end{Bmatrix}p=\begin{Bmatrix}30{,}369\\ 3{,}5603\\ 0\end{Bmatrix}p .$$

Din criteriul Tsai-Hill (10.25) se obține $p_{-45^0}=p_{45^0}$, $p_{0^0}=7{,}73\,\text{MPa}$.

$$p_{45^0}=\frac{1200}{\left[30{,}803^2-30{,}803^2+\left(\frac{1200}{28}\right)^2 30{,}803^2+\left(\frac{1200}{43}\right)^2 1{,}3564^2\right]^{\frac{1}{2}}}=0{,}908\,\text{MPa},$$

deci presiunea care poate produce fisurarea vasului este $p=0{,}908\,\text{MPa}$..

11.
SOLICITĂRI COMBINATE

În capitolele 5, 6 şi 8 s-au studiat cele patru solicitări simple: întinderea (compresiunea), forfecarea, încovoierea şi răsucirea. În practică, adesea, acestea apar împreună, producând *solicitări combinate* sau *solicitări compuse*.

Dacă în secțiunea barei acționează eforturi care produc tensiuni de același fel, acestea se compun algebric, deci problema se rezolvă aplicând principiul suprapunerii efectelor. Astfel, la întindere şi încovoiere se produc tensiuni normale, în timp ce la forfecare şi răsucire se produc tensiuni tangențiale.

Când în secțiunea barei acționează eforturi care produc simultan tensiuni normale şi tensiuni tangențiale, de exemplu în cazul solicitărilor la încovoiere şi răsucire, sau întindere şi răsucire, pentru rezolvarea problemei se utilizează teoriile de rezistență.

11.1 Întinderea excentrică

Se consideră bara din figura 11.1, solicitată de forța F, paralelă cu axa barei, aplicată în punctul $B\left(y_0, z_0\right)$.

Pentru a stabili valorile eforturilor care acționează într-o secțiune oarecare, se reduce forța în centrul de greutate al secțiunii transversale, rezultând o forță axială $N = F$ şi un moment încovoietor $M_i = F\sqrt{y_0^2 + z_0^2}$, a cărui direcție nu corespunde cu axele centrale principale ale secțiunii. Pentru simplificarea calculelor este utilă descompunerea acestui moment în două componente orientate în lungul axelor: $M_z = -F y_0$ şi $M_y = F z_0$ (față negativă).

Într-un punct $C(y, z)$ din cadranul I $\left(y > 0, z > 0\right)$, tensiunile normale produse de cele trei eforturi N, M_z şi M_y sunt pozitive şi se însumează algebric. Tensiunea totală are expresia

$$\sigma_x = \frac{F}{A} + \frac{M_y\, z}{I_y} - \frac{M_z\, y}{I_z} = \frac{F}{A} + \frac{F\, z_0\, z}{I_y} + \frac{F\, y_0\, y}{I_z}$$

sau

$$\sigma_x = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{z_0\, z}{i_y^2} + \frac{y_0\, y}{i_z^2}\right), \tag{11.1}$$

unde s-au înlocuit razele de inerție

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \qquad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}. \tag{11.2}$$

Axa neutră, definită ca locul geometric al punctelor în care $\sigma_x = 0$, are ecuația

$$1 + \frac{z_0\, z}{i_y^2} + \frac{y_0\, y}{i_z^2} = 0, \tag{11.3}$$

care poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{z}{\frac{i_y^2}{z_0}} + \frac{y}{\frac{i_z^2}{y_0}} = 1. \tag{11.4}$$

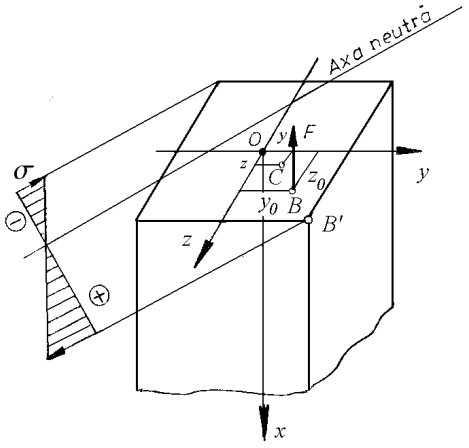


Fig. 11.1

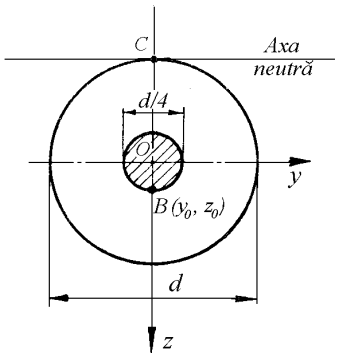


Fig. 11.2

Cunoscând poziția axei neutre, se duc tangentele la conturul secțiunii paralele cu axa neutră, obținând punctele în care tensiunea normală totală σ_x are

valori extreme. Înlocuind coordonatele acestor puncte în expresia (11.1) se calculează σ_{max} şi σ_{min} şi se poate construi diagrama tensiunilor (v. fig. 11.1).

Exemplul 11.1

Să se determine locul geometric al punctelor de aplicație a unei forțe excentrice, paralele cu axa barei, pentru care axa neutră corespunzătoare este tangentă la conturul secțiunii circulare (fig. 11.2).

Rezolvare

Fie ecuația tangentei în *C* la cercul de diametru *d* (fig. 11.2) $z=-\dfrac{d}{2}$ care prin identificare cu ecuația generală a axei neutre (11.2) duce la determinarea coordonatelor punctului *B* de aplicație a forței:

$$y_0=0\,,\qquad z_0=-\frac{i_y^2}{z}=-\frac{\dfrac{d^2}{16}}{-\dfrac{d}{2}}=\frac{d}{8}\,.$$

Când axa neutră ocupă poziția altor tangente la cerc, punctul *B* parcurge un cerc de rază $d/8$, numit "sâmbure central". Când forța *F* este aplicată pe conturul sau în interiorul sâmburelui central, axa neutră este tangentă sau nu intersectează secțiunea, deci tensiunile au acelaşi semn pe toată suprafața.

Exemplul 11.2

Dacă bara din figura 11.1 are secțiunea pătrată cu latura *a*, să se calculeze tensiunea normală maximă din bară când forța *F* este aplicată în punctul $B'(a/2\,,\ a/2)$.

Rezolvare

În acest caz $y_0=z_0=\dfrac{a}{2}$, $i_y^2=i_z^2=\dfrac{a^2}{12}$ şi din relația (11.1) se obține, în punctul B',

$$\sigma_{max}=\frac{7F}{a^2}\,.$$

Exemplul 11.3

Să se dimensioneze grinda din figura 11.3, *a*, asupra căreia acționează forța axială $F=36\,kN$. Grinda este din lemn cu $\sigma_a=10$ N/mm^2 şi are secțiunea dreptunghiulară $a\times 2a$.

Rezolvare

Secțiunea periculoasă $A-A$, de formă pătrată $a\times a$ (fig. 11.3, *a*), este solicitată la întindere excentrică. Dacă se reduce forța *F* în centrul de greutate *C* al secțiunii slăbite, se obține torsorul format din forța axială *F*, care produce întindere, şi cuplul, de moment $M_y = F\dfrac{a}{2}$, care produce încovoiere.

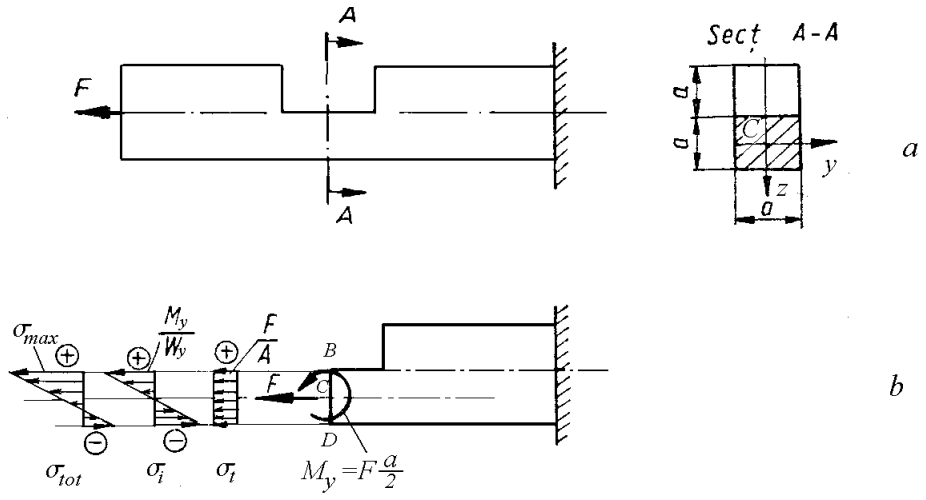


Fig. 11.3

Tensiunea normală este maximă în punctul *B* al secțiunii (fig. 11.3, *b*) şi are expresia

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{F}{a^2} + \frac{F\dfrac{a}{2}}{\dfrac{a^2}{6}} = \frac{4F}{a^2}.$$

Egalând σ_{max} cu σ_a se poate face dimensionarea barei

$$\sigma_a = \frac{4F}{a^2}, \text{ de unde } a = \sqrt{\frac{4F}{\sigma_a}} = \sqrt{\frac{4\cdot 36\cdot 10^3}{10}} = 120\,\text{mm}.$$

Exemplul 11.4

Să se verifice cârligul din figura 11.4 *a*, asupra căruia acționează forța $F = 2\,\text{kN}$. Cârligul este din oțel cu $\sigma_a = 120\,\text{MPa}$ şi are secțiunea circulară cu diametrul $d = 20\,\text{mm}$.

Rezolvare

Secțiunea *AB* a cârligului este solicitată la întindere excentrică. Se reduce forța *F* în centrul de greutate *C* al secțiunii, la torsorul format din forța axială *F*, care produce întindere, şi cuplul de moment $M_y = Fe$ care produce încovoiere.

Tensiunea normală este maximă în punctul *A* al secțiunii (fig. 11.4, b) şi are expresia

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} + \frac{Fe}{\frac{\pi d^3}{32}}.$$

Înlocuind valorile numerice rezultă

$$\sigma_{max} = \frac{4 \cdot 2000}{\pi} + \frac{32 \cdot 2000 \cdot 4}{\pi \cdot 20^3} = 108{,}3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < \sigma_a .$$

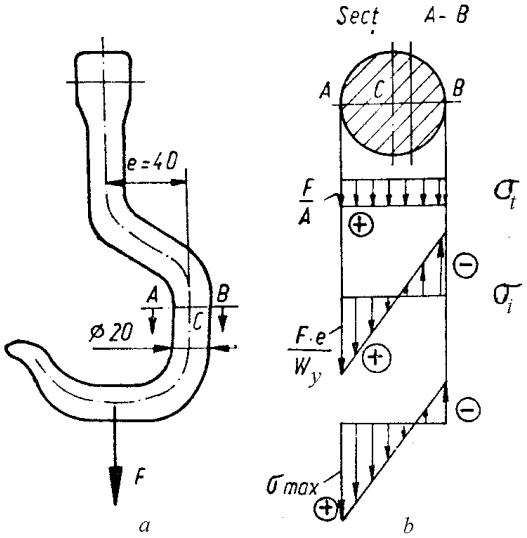


Fig. 11.4

11.2 Bare solicitate la încovoiere şi răsucire

Arborii de secțiune circulară sau inelară, solicitați prin moment încovoietor şi moment de răsucire, se calculează utilizând teoriile de rezistență. Astfel, relația teoriei a III-a de rezistență (10.19) se scrie:

$$\sigma_{ech\,\mathrm{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_i}{W_y}\right)^2 + 4\left(\frac{M_t}{W_p}\right)^2}\,. \tag{11.5}$$

Deoarece la secțiuni axial-simetrice între modulele de rezistență se stabileşte relația

$$W_p = 2W_y\,, \tag{11.6}$$

expresia (11.5) se scrie

$$\sigma_{ech\,\mathrm{III}} = \frac{\sqrt{M_i^2 + M_t^2}}{W_y} = \frac{M_{ie\,\mathrm{III}}}{W_y}\,. \tag{11.7}$$

unde $M_{ie\,\mathrm{III}}$ este *momentul încovoietor echivalent*.

Pentru bare din oțel, conform celor cinci teorii clasice de rezistență, momentul încovoietor echivalent are expresia

$$\begin{aligned}
M_{ie\,\mathrm{I}} &= 0{,}5M_i + 0{,}5\sqrt{M_i^2 + M_t^2}\,,\\
M_{ie\,\mathrm{II}} &= 0{,}35M_i + 0{,}65\sqrt{M_i^2 + M_t^2}\,,\\
M_{ie\,\mathrm{III}} &= \sqrt{M_i^2 + M_t^2}\,,\\
M_{ie\,\mathrm{IV\,a}} &= \sqrt{M_i^2 + 0{,}65M_t^2}\,,\\
M_{ie\,\mathrm{IV\,b}} &= \sqrt{M_i^2 + 0{,}75M_t^2}\,.
\end{aligned} \tag{11.8}$$

Utilizând una din relațiile (11.8), efectele încovoierii şi răsucirii sunt cumulate într-o singură mărime, momentul încovoietor echivalent, cu care se face un calcul la încovoiere. Astfel, formula de dimensionare (8.14, *a*) devine

$$W_{y_{nec}} = \frac{M_{ie}}{\sigma_a}\,, \tag{11.9}$$

deci problema de solicitare combinată se transformă într-o problemă de solicitare la încovoiere, neglijând efectul forței tăietoare.

Exemplul 11.5

Să se dimensioneze bara cotită plană din figura 11.5, solicitată de o forță perpendiculară pe planul barei, din oțel de secțiune circulară cu $\sigma_a = 80\,\mathrm{MPa}$.

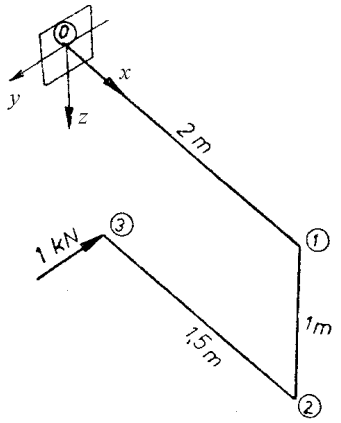


Fig. 11.5

Rezolvare

Pentru bara *2-3*, în secțiunea *2*,

$$M_{i_2} = 1{,}5 \text{ kNm}$$

Bara *2-1* este solicitată la încovoiere şi răsucire. În secțiunea *1*

$$M_{i_1} = 1 \text{ kNm}, \qquad M_{t_1} = 1{,}5 \text{ kNm},$$

deci, pe baza teoriei a III-a de rezistență,

$$M_{ie\,1} = \sqrt{M_{i\,1}^2 + M_{t\,1}^2} = \sqrt{3{,}25} = 1{,}8 \text{ kNm}.$$

Bara *1-0* este solicitată la încovoiere şi răsucire. În secțiunea *1*

$$M_{i_1} = 1{,}5 \text{ kNm}, \; M_{t_1} = 1 \text{ kNm}, \quad M_{ie_1} = 1{,}8 \text{ kNm},$$

iar în secțiunea *0,*

$$M_{i_0} = 0{,}5 \text{ kNm}, \; M_{t_0} = 1 \text{ kNm}, \quad M_{ie_0} = 1{,}1 \text{ kNm}.$$

Rezultă că "secțiunea periculoasă" este în punctul *1*.

$$W_{y_{nec}} = \frac{M_{ie1}}{\sigma_a} = \frac{1{,}8 \cdot 10^6}{80} = 22{,}5 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \cong 0{,}1 d^3$$

deci se alege $d = 60$ mm.

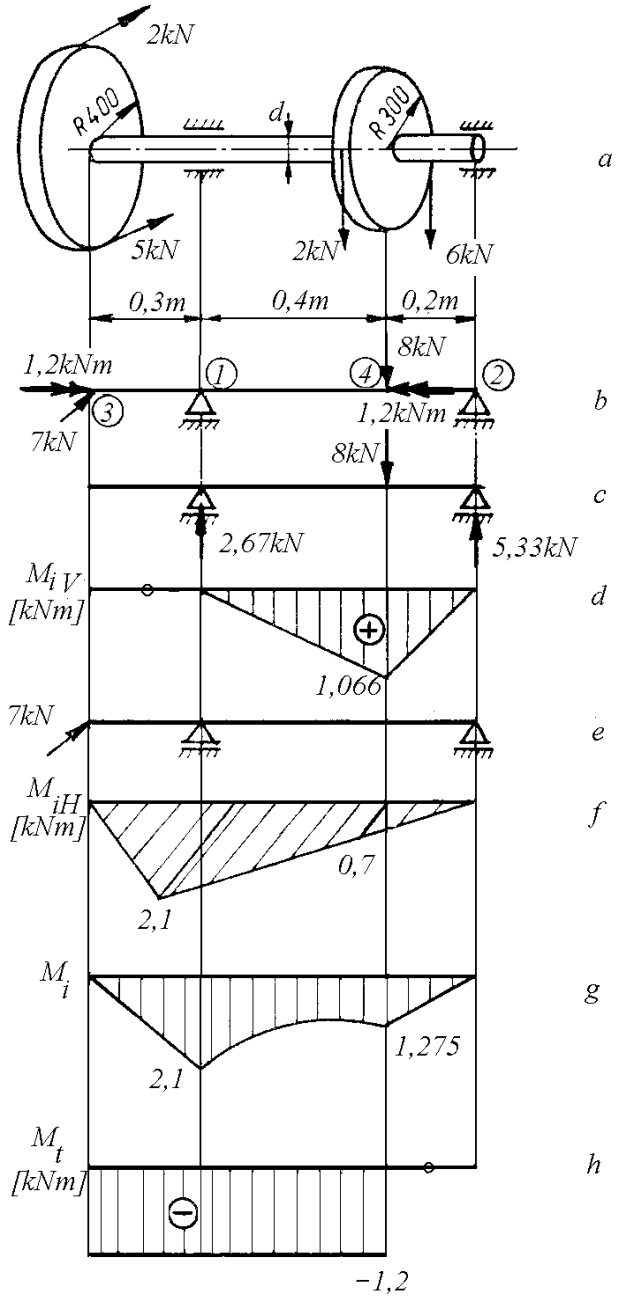

2kN
R400
d
R300
a
5kN
2kN
6kN
0,3m
0,4m
0,2m
8kN
1,2kNm
1
4
2
b
3
7kN
1,2kNm
8kN
c
2,67kN
5,33kN
$M_{i\,V}$
[kNm]
d
1,066
7kN
e
M_{iH}
[kNm]
f
0,7
2,1
M_i
g
1,275
2,1
M_t
[kNm]
h
−1,2

Fig. 11.6

Exemplul 11.6

Să se dimensioneze arborele din figura 11.6, *a* din oțel, cu $\sigma_a = 80\,\text{MPa}$, de secțiune circulară.

Rezolvare

Reducând în centrul de greutate al secțiunii transversale a arborelui forțele care acționează asupra roților (fig. 11.6, *b*), rezultă că bara este solicitată la răsucire şi încovoiere (se neglijează forfecarea).

Pentru bara solicitată de forța verticală (fig. 11.6, *c*) se construieşte diagrama momentelor încovoietoare M_{i_V} (fig. 11.6, *d*). Pentru bara solicitată numai de forța orizontală (fig. 11.6, *e*) se construieşte diagrama momentelor încovoietoare M_{i_H} (fig. 11.6, *f*). Compunând geometric (vectorial) cele două diagrame, se rabate fiecare moment rezultant în planul figurii obținându-se diagrama momentelor încovoietoare M_i (fig. 11.6, *g*).

Se construieşte diagrama momentelor de răsucire M_t (fig. 11.6, *h*). Secțiunea periculoasă este în dreptul reazemului *1*, momentul încovoietor echivalent fiind

$$M_{ie\,\text{III}} = \sqrt{M_i^2 + M_t^2} = \sqrt{2{,}1^2 + 1{,}2^2} = 2{,}418\,\text{kNm}\,.$$

Rezultă

$$W_{y_{nec}} = \frac{M_{ie\,\text{III}}}{\sigma_a} = \frac{2{,}418 \cdot 106}{80} = 30{,}2 \cdot 10^3\,\text{mm}^3 \cong 0{,}1d^3$$

deci

$$d = 67\,\text{mm}\,.$$

11.3 Bare solicitate la întindere şi răsucire

În cazul barelor solicitate la întindere (compresiune) şi răsucire, se utilizează relațiile (10.19). Se face o predimensionare a barei la răsucire, apoi se verifică la solicitarea combinată punând condiția ca $\sigma_{ech} \le \sigma_a$.

Exemplul 11.7

Să se dimensioneze tronsonul *2-3* al barei din figura 2.18 din oțel, cu $\sigma_a = 90\,\text{MPa}$, de secțiune circulară. Să se verifice apoi tronsonul *2-3*, considerând că are aceeaşi secțiune ca tronsonul *1-2*.

Rezolvare

Se trasează diagramele de eforturi ca în figura 2.18.

Tronsonul 1-2 este solicitat la încovoiere şi răsucire, cu secțiunea periculoasă în *1*. Secțiunea barei fiind circulară, se calculează momentul încovoietor rezultant

$$M_{i_1} = \sqrt{M_{z_1}^2 + M_{y_1}^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4{,}47 \text{ kNm}.$$

Momentul încovoietor echivalent, conform teoriei a III-a de rezistență

$$M_{ie\,1} = \sqrt{M_{i_1}^2 + M_{t_1}^2} = \sqrt{4{,}47^2 + 1{,}6^2} = 4{,}75 \text{ kNm}.$$

Se dimensionează tronsonul *1-2* utilizând formula (11.9): $W_{y_{nec}} = \dfrac{M_{ie_1}}{\sigma_a}$,

adică

$$\frac{\pi d^3}{32} = \frac{4{,}75 \cdot 10^6}{90}, \qquad d = 81{,}3 \text{ mm}.$$

Se alege $d = 82$ mm.

Tronsonul 2-3 se verifică la solicitarea de întindere cu încovoiere, în secțiunea periculoasă *2*

$$\sigma_{ef_2} = \frac{N}{A} + \frac{M_i}{W_{ax}} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 10^3}{\pi \cdot 82^2} + \frac{32 \cdot 1{,}6 \cdot 10^6}{\pi \cdot 82^3} = 30{,}3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} < \sigma_a.$$

Exemplul 11.8

La bara din figura 2.19, *a* se cunosc $F = 10$ kN şi $a = 1$ m. Dacă $\sigma_a = 90$ MPa, se cere să se verifice bara ştiind că tronsonul *1-2* are secțiunea transversală dreptunghiulară, cu $b = 100$ mm şi $h = 150$ mm, iar tronsoanele *2-3* şi *3-4* au secțiuni transversale circulare, ambele cu $d = 140$ mm.

Rezolvare

Se trasează diagramele de eforturi ca în figura 2.19.

Tronsonul 1-2 este solicitat la întindere şi încovoiere oblică, secțiunea transversală fiind dreptunghiulară. Eforturile *N*, M_y şi M_z sunt constante de-a lungul tronsonului. Se calculează σ_{ef} şi se compară cu σ_a:

$$\sigma_{ef\,1-2} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{F}{b\,h} + \frac{F\,a}{\frac{bh^2}{6}} + \frac{F\,a}{\frac{bh^2}{6}}.$$

Înlocuind cu valori numerice, rezultă

$$\sigma_{ef\,1-2}=\frac{10^4}{100\cdot 150}+\frac{6\cdot 10^4\cdot 10^3}{100\cdot 150^2}+\frac{6\cdot 10^4\cdot 10^3}{100\cdot 150^2}=67{,}3\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}<\sigma_a\,.$$

Tronsonul 2-3 este solicitat la încovoiere şi răsucire, cu secţiunea periculoasă în *3*. Se calculează σ_3 şi τ_3 şi se combină conform teoriei a III-a de rezistenţă

$$\sigma_3=\frac{M_{i_3}}{W_{ax}}=\frac{2aF}{\frac{\pi d^3}{32}}=\frac{32\cdot 2\cdot 10^3\cdot 10^4}{\pi\cdot 140^3}=74{,}3\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\,,$$

$$\tau_3=\frac{M_{t_3}}{W_p}=\frac{aF}{\frac{\pi d^3}{16}}=\frac{16\cdot 10^3\cdot 10^4}{\pi\cdot 140^3}=18{,}6\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\,,$$

$$\sigma_{ech\,3}=\sqrt{\sigma_3^2+4\tau_3^2}=\sqrt{74{,}3^2+4\cdot 18{,}6^2}=83\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}<\sigma_a\,.$$

Tronsonul 3-4 este de asemenea solicitat la încovoiere şi răsucire, cu secţiunea periculoasă în *3*. Se procedează analog

$$\sigma_3=\frac{M_{i_3}}{W_{ax}}=\frac{aF}{\frac{\pi d^3}{32}}=\frac{32\cdot 10^3\cdot 10^4}{\pi\cdot 140^3}=37{,}1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\,,$$

$$\tau_3=\frac{M_{t_3}}{W_p}=\frac{2aF}{\frac{\pi d^3}{16}}=\frac{16\cdot 2\cdot 10^3\cdot 10^4}{\pi\cdot 140^3}=37{,}1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\,,$$

$$\sigma_{ech\,3}=\sqrt{\sigma_3^2+4\tau_3^2}=\sqrt{37{,}1^2+4\cdot 37{,}1^2}=83\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}<\sigma_a\,.$$

Exemplul 11.9

Un arbore din oţel cu $\sigma_c=200\,\mathrm{MPa}$ şi diametrul $d=50\,\mathrm{mm}$ este solicitat de un moment încovoietor $M_i=1{,}9\,\mathrm{kNm}$. Se cere valoarea maximă a momentului de răsucire care mai poate fi suportat de arbore conform: a) criteriului de curgere Tresca; b) criteriului de curgere von Mises.

Rezolvare

Modulul de rezistenţă axial este

$$W_y = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 50^3}{32} = 12{,}27 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 .$$

Momentul încovoietor echivalent este

$$M_{ie} = \sigma_c W_y = 200 \cdot 12{,}27 \cdot 10^3 = 2{,}454 \cdot 10^6 \text{ Nmm} = 2{,}454 \text{ kNm} .$$

Conform criteriului Tresca, momentul de răsucire maxim este

$$M_{t1} = \sqrt{M_{ie}^2 - M_i^2} = \sqrt{2.454^2 - 1{,}9^2} = 1{,}55 \text{ kNm} .$$

Conform criteriului von Mises, momentul de răsucire maxim este

$$M_{t2} = \sqrt{\frac{4}{3}\left(M_{ie}^2 - M_i^2\right)} = \sqrt{\frac{4}{3}\left(2.454^2 - 1{,}9^2\right)} = 1{,}79 \text{ kNm} .$$

Bibliografie

1. Alexander, J., and Gunasekera, J. S., *Strength of Materials, Advanced Theory and Applications*, vol.2, Ellis Horwood Ltd., New York, 1991.
2. Atanackovic, T. M. and Guran, A., *Theory of Elasticity for Scientists and Engineers*, Birkhäuser, Boston, 2000.
3. Bannantine, J. A., Comer, J. J., and Handrock, J. L., *Fundamentals of Metal Fatigue Analysis*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1990.
4. Bedford, A. and Liechti, K. M., *Mechanics of Materials*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 2000.
5. Beer, F. P., Johnston, E. R. Jr., and De Wolf, J. T., *Mechanics of Materials*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 2001.
6. Benham, P. P., Crawford, R. J. and Armstrong, C. G., *Mechanics of Engineering Materials,* 2nd edition, Longman, 1996.
7. Boley, B. A. and Weiner, J. H., *Theory of Thermal Stresses*, Wiley, New York, 1960.
8. Boresi, A. P., and Chong, K. P., *Elasticity in Engineering Mechanics*, 2nd ed., Wiley-Interscience, 2000.
9. Boresi, A. P., Schmidt, R. J. and Sidebottom, O. M., *Advanced Mechanics of Materials*, 5th ed., John Wiley, New York, 1993.
10. Böge, A., *Technische Mechanik*, 26. Auflage, Vieweg, Braunschweig, 2003.
11. Brommundt, E. and Sachs, G., *Technische Mechanik. Eine Einführung*, 3. Auflage, Oldenbourg, München, 1998.
12. Budynas, R. C., *Advanced Strength and Applied Stress Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill International Editions, 1999.
13. Buzdugan, Gh., *Rezistenţa materialelor*, ed. a XI-a, Editura tehnică, Bucureşti, 1980.
14. Case, J., Chilver, L., Ross C. T. F., *Strength of Materials and Structures*, 4th ed., Arnold, London, 1999.
15. Craig, R. R. Jr., *Mechanics of Materials*, 2nd ed., John Wiley, New York, 1999.
16. Crandall S. H., and Dahl, N. C., eds., *An Introduction to the Mechanics of Solids*, McGraw-Hill, New York, 1959.

17. Dowling, N. E., *Mechanical Behavior of Materials*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1999.

18. Duggan, T. V., *Stress Analysis and Vibrations of Elastic Bodies*, Temple Press Books Ltd., London, 1964.

19. Edwards, K. S. and McKee R. B., *Fundamentals of Mechanical Component Design*, McGraw-Hill, New York, 1991.

20. Felbeck, D. K. and Atkins, A. G., *Strength and Fracture of Engineering Solids*, 2nd ed., Prentice Hall, 1996.

21. Feodosiev, V., *Strength of Materials*, Mir Publishers, Moscow, 1973.

22. Fielding, J. P., *Introduction to Aircraft Design*, Cambridge University Press, 1999.

23. Flügge, W., ed., *Handbook of Engineering Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1968.

24. Frocht, M. M., *Photoelasticity*, vol.I, vol.II, John Wiley, New York, 1941, 1948.

25. Gatewood, B. E., *Thermal Stresses*, McGraw Hill, New York, 1957.

26. Gere, J. M. and Timoshenko, S. P., *Mechanics of Materials*, 4th SI ed., Stanley Thornes Publ. Ltd, 1999.

27**.** Gere, J. M., *Mechanics of Materials*, 5th ed., PW-Kent., Boston, 2001.

28. Gould, P. L., *Analysis of Shells and Plates*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 1999.

29. Harwood, N., and Cummings, W. M., eds., *Thermoelastic Stress Analysis*, Adam Hilger, Bristol, 1991.

30. Hearn, E. J., *Mechanics of Materials*, 3rd ed., Butterworth-Heinemann, Oxford, 2001.

31. Herr, H., *Technische Mechanik. Lehr- und Aufgabenbuch*, 6. Auflage, Verlag Europa - Lehrmittel, Nourney, 2002.

32. Hertzberg, R. W., *Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials*, 3rd ed., John Wiley, New York, 1989.

33. Hetényi, M., ed., *Handbook of Experimental Stress Analysis*, 2nd ed., John Wiley, New York, 1987.

34. Hibbeler, R. C., *Mechanics of Materials*, 4th ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 2000.

35. Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, Scripta Book Co., Washington, D.C., 1975.

36. Kabus, K., *Mechanik und Festigkeitslehre*, 5. Auflage, Hansen, München, 2003.

37. *** *Manual of Steel Construction: Allowable Stress Design*, 9th ed., American Institute of Steel Construction, Chicago, IL, 1989.

38. Massonnet, Ch., *Résistance des matériaux*, 2me éd., Dunod, Paris,1968.

39. Mayr, M., *Technische Mechanik*, 4. Auflage, Hansen, München, 2003.

40. Megson, T. H. G., *Structural and Stress Analysis*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.

41. Megson, T. H. G., *Aircraft Structures for Engineering Students*, 3rd ed., Butterworth-Heinemann, Oxford, 2001.

42. Middleton, D. H., ed., *Composite Materials in Aircraft Structures*, Longman Scientific and Technical, 1990.

43. Mott, R. L., *Applied Strength of Materials*, 3rd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.

44. Müller, W. H. und Ferber, F., *Technische Mechanik für Ingenieure*, Fachbuchverlag, Leipzig, 2003.

45. Neuber, H. P., *Kerbspannungslehre*, 2nd ed., Springer, New York, 1958.

46. Niu M. C.-Y., *Airframe Stress Analysis and Sizing*, Conmilit Press Ltd. Hong Kong, 1997.

47. Noda, N., Hetnarski, R.B. and Tanigawa, Y., *Thermal Stresses*, 2nd ed., Taylor & Francis, New York, 2003.

48. Peterson R. E., *Stress Concentration Factors*, John Wiley, New York, 1974.

49. Petre, A., *Proiectarea structurilor de aeronave şi astronave*, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1999.

50. Pilkey, W. D., *Analysis and Design of Elastic Beams. Computational Methods*, John Wiley, New York, 2002.

51. Pilkey, W. D., *Formulas for Stress, Strain and Structural Matrices*, John Wiley, New York, 1994.

52. Pilkey, W. D., *Peterson's Stress Concentration Factors*, 2nd ed., John Wiley, New York, 1997.

53. Ponomariov, S. D. ş.a., *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini*, Editura tehnică, Bucureşti, 1963.

54. Riley, W. F., Sturges, L. D. and Morris, D. H., *Mechanics of Materials*, 5th ed., John Wiley, New York, 1999.

55. Rivello, R. M., *Theory and Analysis of Flight Structures*, McGraw-Hill, New York, 1969.

56. Rusu, O., *Rezistența materialelor*, Partea a III-a, Institutul Politehnic Bucureşti, 1986,

57. Schnell, W., Gross, D. and Hauger, W., *Technische Mechanik*, Band 2: *Elastostatik*, 7. Auflage, Springer, Berlin, 2002.

58. Shigley, J. E. and Mischke, C. R., *Mechanical Engineering Design*, 6th ed., McGraw-Hill Int. Edition, 2001.

59. Timoshenko, S. P., *Strength of Materials*, 3rd ed., Robert Krieger Pub. Co., Malabar, FL, 1984.

60. Timoshenko, S. P., *History of Strength of Materials*, Dover, New York, 1983.

61. Timoshenko, S. P., and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1970.

62. Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., McGraw-Hill, London, 1961.

63. Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York, 1970.

64. Tsai, S. W. and Hahn, H. T., *Introduction to Composite Materials*, Technomic, Westport, CT, 1980.

65. Ugural, A. C. and Fenster, S. K., *Advanced Strength and Applied Elasticity*, 4th ed., Prentice Hall PTR, London, 2003.

66. Vable M., *Mechanics of Materials*, Oxford University Press, 2002.

67. Vallat, *Résistance des matériaux appliquée à l'aviation*, 2001.

68. Vautrin, A. and Verchery, G., *Analysis and Design of Composite Materials and Structures,* Part I, Pluralis, Paris, 1990.

69. Young, W. C., *Roark's Formulas for Stress and Strain*, 6th ed., McGraw-Hill International, New York, 1989.

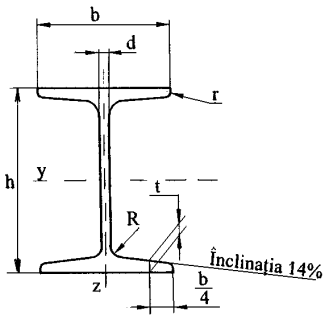
Rezistenţe admisibile

Anexa 1

Materialul		Caracteristici mecanice				Rezistenţe admisibile la tracţiune, σ_{at}, MPa pentru cazul de încărcare			Celelalte rezistenţe admisibile				Observaţii
		STAS	Rezis-tenţa la rupere σ_r MPa	Limita de curgere σ_c MPa	Alungire la rupere δ_5 %	I Solicitare statică	II Solicitare pulsantă	III Solicitare simetrică	Compre-siune $\frac{\sigma_{ac}}{\sigma_{at}}$	Încovoie-re $\frac{\sigma_{ai}}{\sigma_{at}}$	Răsucire $\frac{\tau_{ar}}{\sigma_{at}}$	Forfecare $\frac{\tau_{af}}{\sigma_{at}}$	
Oţel carbon	OL-37	SR EN 10020: 1993	370-450	210-240	26-25	120-140	110-130	70-100	1	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8	
	OL-42		420-500	230-260	22	130-160	110-140	80-110	1	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8	
	OL-50		500-620	270-290	19	150-180	125-160	90-120	1	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8	
	OL-70		min.700	340-360	10	210-250	160-200	110-150	1	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8	
Oţel carbon de calitate superi-oară	OLC 10[x)]	STAS 880-88	420	250	19	130-170	110-140	80-110	1	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8	[x)] Călire şi revenire joasă [xx)] Îmbunătăţit
	OLC 25[xx)]		500	310	22	140-170	120-150	85-115	1	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8	
	OLC 45[xx)]		660	400	17	200-260	170-220	120-160	1	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8	
Oţel aliat	18MC10	STAS 791-88	880	735	10	300-380	230-320	150-220	1	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8	
	33MaC11		880	690	12	300-380	230-280	180-230	1	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8	
	13CN35		1130	930	10	380-460	280-380	190-260	1	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8	
Oţel carbon turnat în piese	OT40-2	SR EN 10020: 1993	400	200	24	100-130	80-110	50-75	1,1	1,1	0,6-0,65	0,8	
	OT50-2		500	280	18	130-180	100-135	70-95	1,1	1,1	0,6-0,65	0,8	
Fonte cu grafit lamelar	Fc 20	SR EN 1561: 1999	230[x)]	-	-	60-80	50-70	30-45	2,5	-	1,2	-	[x)] Pentru probe cu diametrul de 20mm, Piese cu crustă de turnare
	Fc 30		330[x)]	-	-	90-110	70-90	45-60	2,5	-	1,2	-	
Fonte cu grafit nodular	Fgn45-5	SR EN 1563: 1999	450	320	5	150-200	100-140	75-100	2,5	-	1,0-1,2[x)]	-	[x)] 1,1 la cazul III 1,2 La cazul II 1,3 la cazul I
	Fgn60-2		600	400	2	200-260	130-170	90-120	2,5	-	1,0-1,2[x)]	-	
Aliaje neferoa-se de turnare	Bz 12T	SR EN 575 1997	200	-	6	40-65	30-50	20-30	1	1	0,7	-	
	AmT 67		180	-	20	40-60	30-50	20-35	1	1	0,7		
	ATMg3Si		130	-	3	40-75	30-55	20-35	1	1,1-1,2	0,7	0,8	

Oțel I
(conform STAS 565-80)

Anexa 2a



h-înălțimea profilului
b-lățimea tălpilor
d-grosimea inimii
t-grosimea medie a tălpilor
r-raza de rotunjire a tălpilor la vârf

I – momentul de inerție
W – modulul de rezistență } raportate la axa de încovoiere respectivă
$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ – raza de inerție

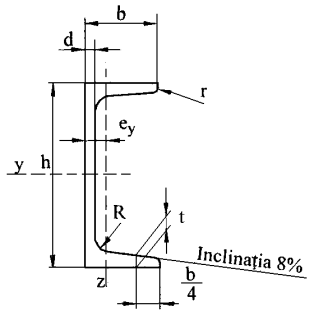
S-momentul static al semisecțiunii
R-raza de rotunjire interioară a tălpilor

Profil I	Dimensiuni h mm	b mm	t mm	d-R mm	r mm	Aria secțiunii A cm^2	Masa teoretică μ kg/m	Mărimi statice față de axele de încovoiere y I_y cm^4	y W_y cm^3	y i_y cm	z I_z cm^4	z W_z cm^3	z i_z cm	S_y cm^3	Profil I
8	80	42	5,90	3,9	2,3	7,58	5,95	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91	11,4	8
10	100	50	6,80	4,5	2,7	10,6	8,32	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07	19,9	10
12	120	58	7,70	5,1	3,1	14,2	11,2	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23	31,8	12
14	140	66	8,60	5,7	3,4	18,3	14,4	573	81,9	5,61	36,2	10,71	1,40	47,7	14
16	160	74	9,50	6,3	3,8	22,8	17,9	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55	68,0	16
18	180	82	10,40	6,9	4,1	27,9	21,9	1450	161	7,20	81,3	19,8	1,71	93,4	18
20	200	90	11,30	7,5	4,5	33,5	26,3	2140	214	8,00	117	26,0	1,87	125	20
22	220	98	12,20	8,1	4,9	39,6	31,1	3060	278	8,80	162	33,1	2,02	162	22
24	240	106	13,10	8,7	5,2	46,1	36,2	4250	354	9,59	221	41,7	2,20	206	24
26	260	113	14,10	9,4	5,6	53,4	41,9	5740	442	10,4	288	51,0	2,32	257	26
28	280	119	15,20	10,1	6,1	61,1	48,0	7590	542	11,1	364	61,2	2,45	316	28
30	300	125	16,20	10,8	6,5	69,1	54,2	9800	653	11,9	451	72,2	2,56	381	30
32	320	131	17,30	11,5	6,9	77,8	61,1	12510	782	12,7	555	84,7	2,67	457	32
36	360	143	19,50	13,0	7,8	97,1	76,2	19610	1090	14,2	818	114,0	2,90	638	36
40	400	155	21,60	14,4	8,6	118	92,6	29210	1460	15,7	1160	149,0	3,13	857	40

Oţel U

(conform STAS 564-80)

Anexa 2b

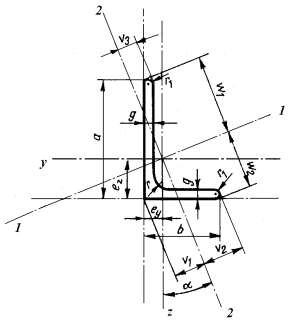


h-înălţimea profilului
b-lăţimea profilului
d-grosimea inimii
t- grosimea medie a tălpilor
R-raza de rotunjire interioara a tălpilor
r-raza de rotunjire a tălpilor la vârf

$$\left.\begin{array}{l} W - \text{modulul de rezistenţă} \\ i = \sqrt{\frac{I}{A}} - \text{raza de inerţie} \end{array}\right\} \text{raportate la axa de încovoiere respectivă}$$

S-momentul static al semisecţiunii
e_y-distanţa axei z de la marginea exterioară a inimii

Profil U	Dimensiuni						Aria secţiunii A	Masa teoretică μ	Mărimi statice faţă de axele de încovoiere						S_y	e_y	Profil U
									y			z					
	h	b	d	t	R	r	A	μ	I_y	W_y	i_y	I_z	W_z	i_z			
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm^2	kg/m	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	cm^3	cm	
6,5	65	42	5,5	7,5	7,5	4,0	9,03	7,09	57,5	17,7	2,52	14,1	5,07	1,25	-	1,42	6,5
8	80	45	6	8,0	8,0	4,0	11,0	8,64	106	26,5	3,10	19,4	6,36	1,33	15,9	1,45	8
10	100	50	6	8,5	8,5	4,5	13,5	10,6	205	41,2	3,91	29,3	8,49	1,47	24,5	1,55	10
12	120	55	7	9,0	9,0	4,5	17,0	13,4	364	60,7	4,62	43,2	11,1	1,59	36,3	1,60	12
14	140	60	7	10,0	10,0	5,0	20,4	16,0	605	86,4	5,45	62,7	14,8	1,75	51,4	1,75	14
16	160	65	7,5	10,5	10,5	5,5	24,0	18,8	925	116	6,21	85,3	18,3	1,89	68,8	1,84	16
18	180	70	8	11,0	11,0	5,5	28,0	22,0	1350	150	6,95	114	22,4	2,02	89,6	1,92	18
20	200	75	8,5	11,5	11,5	6,0	32,2	25,3	1910	191	7,70	148	27,0	2,14	114	2,01	20
22	220	80	9	12,5	12,5	6,5	37,4	29,4	2690	245	8,48	197	33,6	2,30	146	2,14	22
24	240	85	9,5	13,0	13,0	6,5	42,3	33,2	3600	300	9,22	248	39,6	2,42	179	2,23	24
26	260	90	10	14,0	14,0	7,0	48,3	37,9	4820	371	9,99	317	47,7	2,56	221	2,36	26
30	300	100	10	16,0	16,0	8,0	58,8	46,2	8030	535	11,7	495	67,8	2,90	316	2,70	30



Oțel cornier cu aripi neegale

(conform STAS 425-80)

Anexa 2c

I – moment de inerție
W – modul de rezistență
} raportate la axa de încovoiere respectivă

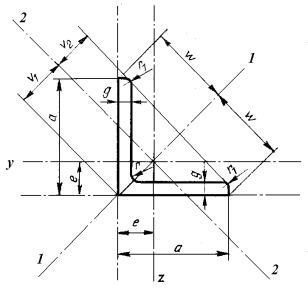
$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ – rază de inerție

Denumirea LL	Dimensiunile secțiunii					Secțiunea A	Masa μ	Distanța axelor							Unghiul de înclinare a axelor tg α	Mărimile statice față de axele de încovoiere									
																y			z			1		2	
	a	b	g	r	r_1	e_z	e_y	w_1	w_2	v_1	v_2	v_3		I_y	W_y	i_y	I_z	W_z	i_z	I_1	i_1	I_2	i_2
	mm					cm^2	kg/m	cm								cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm	cm^4	cm
30 x 20 x 3	30	20	3	3,5	2	1,43	1,12	0,90	0,50	2,05	1,51	0,86	1,04	0,56	0,427	1,25	0,62	0,93	0,44	0,29	0,55	1,43	1,00	0,26	0,42
x 4			4			1,86	1,46	1,03	0,54	2,02	1,52	0,91	1,04	0,58	0,427	1,59	0,81	0,92	0,55	0,38	0,55	1,81	0,99	0,33	0,42
40 x 20 x 3	40	20	3	3,5	2	1,73	1,36	1,42	0,44	2,61	1,77	0,79	1,19	0,46	0,257	2,80	1,09	1,27	0,47	0,30	0,52	2,96	1,31	0,31	0,42
x 4			4			2,26	1,77	1,47	0,48	2,58	1,80	0,83	1,17	0,50	0,252	3,59	1,42	1,26	0,60	0,39	0,51	3,80	1,30	0,39	0,42
45 x 30 x 4	45	30	4	4,5	2	2,86	2,24	1,48	0,74	3,06	2,23	1,21	1,58	0,80	0,434	5,77	1,91	1,42	2,05	0,91	0,85	6,63	1,52	1,19	0,65
x 5			5			3,52	2,76	1,52	0,78	3,04	2,26	1,27	1,58	0,83	0,429	6,98	2,35	1,41	2,47	1,11	0,84	8,00	1,51	1,45	0,64
60 x 30 x 5	60	30	5	6	3	4,29	3,37	2,15	0,68	3,89	2,67	1,20	1,77	0,72	0,256	15,6	4,04	1,90	2,60	1,12	0,78	16,5	1,96	1,69	0,63
x 6			6			5,08	4,59	2,20	0,72	3,86	2,69	1,25	1,75	0,74	0,252	18,2	4,78	1,89	3,02	1,32	0,77	19,2	1,95	1,99	0,63
60 x 40 x 5	60	40	5	6	3	4,79	3,76	1,96	0,97	4,10	3,01	1,68	2,10	1,10	0,434	17,2	4,25	1,89	6,11	2,02	1,13	19,8	2,03	3,54	0,86
x 6			6			5,68	4,46	2,00	1,01	4,08	3,02	1,72	2,10	1,12	0,431	20,1	5,03	1,88	7,12	2,38	1,12	23,1	2,02	4,15	0,86
x 7			7			6,55	5,14	2,04	1,05	4,06	3,03	1,77	2,09	1,14	0,427	22,9	5,79	1,87	8,07	2,74	1,11	26,3	2,00	4,75	0,85
65 x 50 x 6	65	50	6	6,5	3,5	6,58	5,16	2,04	1,29	4,52	3,60	2,15	2,39	1,50	0,575	27,2	6,10	2,03	14,0	3,77	1,46	33,8	2,27	7,43	1,06
x 7			7			7,60	5,96	2,08	1,33	4,50	3,62	2,19	2,39	1,52	0,572	31,1	7,03	2,02	15,9	4,34	1,45	38,5	2,25	8,51	1,06
x 8			8			8,60	6,75	2,11	1,37	4,49	3,64	2,23	2,39	1,54	0,569	34,8	7,93	2,01	17,7	4,89	1,44	43,0	2,23	9,57	1,05
x 9			9			9,58	7,52	2,15	1,49	4,48	3,63	2,28	2,36	1,57	0,567	38,2	8,77	2,00	19,4	5,39	1,42	47,0	2,25	10,5	1,05
75 x 50 x7	75	50	7	6,5	3,5	8,31	6,53	2,48	1,25	5,10	3,77	2,13	2,63	1,38	0,433	46,4	9,24	2,36	16,5	4,39	1,41	53,3	2,53	9,57	1,07

Anexa 2d

Oţel cornier cu aripi egale

(conform STAS 424-80)



I – moment de inerţie
W – modul de rezistenţă
} raportate la axa de încovoiere respectivă

$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ – rază de inerţie

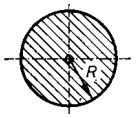
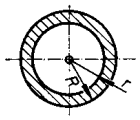
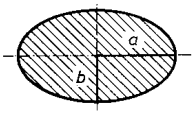
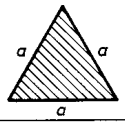
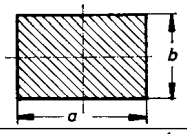
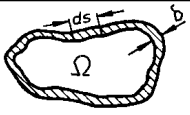
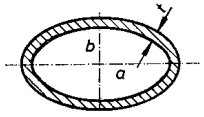
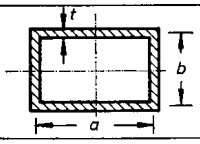
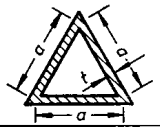
Denumirea L	Dimensiunile secţiunii mm				Secţiunea A cm^2	Masa μ kg/m	Distanţa axelor cm				Mărimile statice faţă de axele de încovoiere								
											y	z		1		2			
	a	g	r	r_1			e	w	v_1	v_2	$I_y=I_z$ cm^4	$W_y=W_z$ cm^3	$i_y=i_z$ cm	I_1 cm^4	i_1 cm	I_2 cm^4	W_2 cm^3	I_2 cm
20x20x3	20	3	3,5	2	1,12	0,88	0,60	1,41	0,84	0,70	0,39	0,28	0,59	0,61	0,74	0,16	0,19	0,38
x4		4			1,45	1,14	0,64		0,90	0,71	0,41	0,36	0,58	0,77	0,73	0,21	0,23	0,38
25x25x3	25	3	3,5	2	1,42	1,11	0,72	1,77	1,02	0,87	0,80	0,45	0,75	1,26	0,94	0,33	0,32	0,48
x4		4			1,85	1,45	0,76		1,08	0,89	1,01	0,58	0,74	1,60	0,63	0,43	0,40	0,48
x5		5			2,26	1,77	0,80		1,13	0,91	1,20	0,71	0,73	1,89	0,91	0,52	0,46	0,48
30x30x3	30	3	5	2,5	1,74	1,36	0,84	2,12	1,18	1,04	1,40	0,65	0,90	2,23	1,13	0,58	0,49	0,58
x4		4			2,27	1,78	0,88		1,24	1,05	1,80	0,85	0,89	2,85	1,12	0,75	0,61	0,58
x5		5			2,78	2,18	0,92		1,30	1,07	2,16	1,04	0,88	3,41	1,11	0,92	0,70	0,57
35x35x3	35	3	5	2,5	2,04	1,60	0,96	2,47	1,36	1,23	2,29	0,90	1,06	3,63	1,34	0,95	0,70	0,68
x4		4			2,67	2,09	1,00		1,42	1,24	2,95	1,18	1,05	4,68	1,33	1,23	0,86	0,68
x5		5			3,28	2,57	1,04		1,48	1,25	3,56	1,45	1,04	5,64	1,31	1,49	1,01	0,67

Denumirea L	Dimensiunile secțiunii mm				Secțiunea A cm^2	Masa μ kg/m	Distanța axelor, cm				Mărimile statice față de axele de încovoiere									
											y	z			1			2		
	a	g	r	r_1			e	w	v_1	v_2	$I_y = I_z$ cm^4	$w_y = w_z$ cm^3	$i_y = i_z$ cm	I_1 cm^4	i_1 cm	I_2 cm^4	w_2 cm^3	i_2 cm
40 x 40 x 3	40	3	6	3	3,35	1,84	1,07	2,83	1,52	1,40	3,45	1,18	1,21	5,46	1,52	1,44	0,96	0,78
x 4		4			3,08	2,42	1,12		1,58	1,40	4,47	1,55	1,21	7,09	1,52	1,85	1,17	0,78
x 5		5			3,79	2,97	1,16		1,64	1,42	5,43	1,91	1,20	8,60	1,51	2,26	1,37	0,77
45 x 45 x 4	45	4	7	3,5	3,49	2,74	1,23	3,18	1,75	1,57	6,43	1,97	1,36	10,2	1,71	2,67	1,53	0,87
x 5		5			4,30	3,38	1,28		1,81	1,58	7,84	2,43	1,35	12,4	1,70	3,25	1,80	0,87
x 6		6			5,08	4,00	1,32		1,87	1,59	9,16	2,88	1,34	14,5	1,69	3,82	2,04	0,87
50 x 50 x 4	50	4	7	3,5	3,89	3,06	1,36	3,54	1,92	1,75	8,98	2,46	1,52	14,2	1,91	3,72	1,94	0,98
x 5		5			4,80	3,77	1,40		1,98	1,76	11,00	3,05	1,51	17,4	1,90	4,54	2,59	0,97
x 6		6			5,69	4,47	1,45		2,04	1,77	12,80	3,61	1,50	20,4	1,89	5,33	2,61	0,97
x 7		7			6,56	5,15	1,49		3,10	1,78	14,60	4,16	1,49	23,1	1,88	6,10	2,91	0,96
60 x 60 x 5	60	5	8	4	5,82	4,57	1,64	4,24	2,32	2,11	19,4	4,45	1,82	30,7	2,30	8,02	3,45	1,17
x 6		6			6,91	5,42	1,69		2,39	2,11	22,8	5,29	1,82	36,2	2,29	9,43	3,95	1,17
x 8		8			9,63	7,09	1,77		2,50	2,14	29,2	6,89	1,80	46,2	2,26	12,1	4,86	1,16
x 10		10			11,1	8,69	1,85		2,61	2,17	34,9	8,41	1,78	55,1	2,23	14,8	5,67	1,16
70 x 70 x 6	70	6	9	4,5	8,13	6,38	1,93	4,95	2,73	2,46	36,9	7,27	2,13	53,5	2,68	15,2	5,59	1,37
x 7		7			9,40	7,38	1,97		2,79	2,47	42,4	8,41	2,12	67,1	2,67	17,5	6,27	1,36
x 8		8			10,60	8,38	2,01		2,85	2,49	47,5	9,52	2,11	75,3	2,66	19,7	6,91	1,36
x 9		9			11,90	9,34	2,05		2,90	2,50	52,6	10,60	2,10	83,1	2,64	22,0	7,59	1,36
x 10		10			13,10	10,30	2,09		2,96	2,52	57,2	11,70	2,09	90,5	2,63	23,9	8,09	1,35
80 x 80 x 6	80	6	10	5	9,35	7,36	2,17	5,66	3,07	2,82	55,8	9,57	2,44	88,5	3,08	23,1	7,55	1,36
x 8		8			12,30	9,63	2,26		3,19	2,82	72,2	12,6	2,43	115	3,06	29,8	9,36	1,55
x 10		10			15,1	11,9	2,34		3,30	2,85	87,5	15,4	2,41	138	3,03	36,3	11,0	1,55

Denumirea L	Dimensiunile secţiunii mm				Secţiunea A cm^2	Masa μ kg/m	Distanţa axelor, cm				Mărimile statice faţă de axele de încovoiere							
											y	z		1		2		
	a	g	r	r_1			e	w	v_1	v_2	$I_y = I_z$ cm^4	$W_y = W_z$ cm^3	$i_y = i_z$ cm	I_1 cm^4	i_1 cm	I_2 cm^4	W_2 cm^3	i_2 cm
90 x 90 x 8	90	8	11	5,5	13,9	10,9	2,5	6,36	3,53	3,17	104	16,1	2,74	166	3,45	43,1	12,2	1,76
x 9		9			15,5	12,2	2,54		3,59	3,18	116	18,0	2,74	184	3,45	47,8	13,3	1,76
x 10		10			17,1	13,4	2,58		3,65	3,26	129	21,1	2,74	204	3,43	52,5	14,4	1,75
x 11		11			18,7	14,7	2,62		3,70	3,21	138	21,6	2,72	218	3,41	57,1	15,4	1,75
100 x 100 x 8	100	8	12	6	15,5	12,2	2,74	7,07	3,87	3,52	145	19,9	3,06	230	3,85	59,8	15,4	1,96
x 10		10			19,2	15,0	2,82		3,99	3,54	177	24,6	3,04	280	3,83	72,9	18,3	1,95
x 12		12			22,7	17,8	2,90		4,11	3,57	207	29,1	3,02	328	3,80	85,7	20,9	1,94
120 x 120 x 10	120	10	13	6,5	23,2	18,2	3,31	8,49	4,69	4,23	313	36,0	3,67	497	4,63	129	27,5	2,36
x 12		12			27,5	21,6	3,40		4,80	4,26	368	42,7	3,65	584	4,60	151	31,5	2,35
130 x 130 x 12	130	12	14	7	30,0	23,6	3,64	9,19	5,15	4,60	472	50,4	3,97	750	5,00	194	37,7	2,54
x 14		14			34,7	27,2	3,72		5,26	4,63	540	58,2	3,94	857	4,97	223	42,4	2,53
x 16		16			39,3	30,9	3,80		5,37	4,66	605	65,8	3,92	959	4,94	251	46,7	2,52
140 x 140 x 12	140	12	15	7,5	32,5	25,5	3,90	9,90	5,50	5,04	602	59,7	4,31	957	5,43	248	44,9	2,76
x 14		14			37,6	29,4	3,98		5,61	5,07	689	68,8	4,30	1094	5,42	284	50,5	2,74
x 16		16			42,2	37,3	4,20		5,90	5,09	772	79,1	4,28	1230	5,40	314	61,5	2,72
150 x 150 x 12	150	12	16	8	34,8	27,3	4,12	10,6	5,83	5,29	737	67,7	4,60	1170	5,80	303	52,0	2,95
x 14		14			40,3	31,6	1,21		5,95	5,31	845	78,2	4,58	1340	5,77	347	58,3	2,94
x 16		16			45,7	35,9	4,29		6,07	5,34	949	88,7	4,56	1510	5,74	391	64,4	2,93
x 18		18			51,0	40,1	4,37		6,17	5,38	1050	98,7	4,54	1670	5,71	435	70,4	2,92
160 x 160 x 12	160	12	17	8,5	37,4	29,7	4,39	11,3	6,19	5,74	913	78,6	4,94	1450	6,23	376	60,5	3,17
x 14		14			43,3	34,0	4,47		6,30	5,77	1046	90,8	4,92	1662	6,20	431	68,4	3,16
x 16		16			49,1	38,5	4,55		6,42	5,79	1175	103	4,89	1866	6,17	485	75,3	3,14
x 18		18			54,8	43,0	4,63		6,53	5,82	1299	114	4,87	2061	6,13	537	82,1	3,13

Anexa 3

Momente de inerție la răsucire

	$I_t=\frac{\pi}{2}R^4$
	$I_t=\frac{\pi}{2}(R^4-r^4)$
	$I_t=\pi\,\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}$
	$I_t=0{,}0216\,a^4$
	$I_t=\alpha a b^3$ a/b: 1 | 2 | 4 | 8 | ∞ α: 0,141 | 0,229 | 0,281 | 0,307 | 0,333
	***Formula lui Bredt*** $I_t=4\Omega^2/\oint\frac{1}{\delta}ds$
	$I_t=4\pi\,\frac{a^3b^2t}{a^2+b^2}$
	$I_t=2\,\frac{a^2b^2t}{a+b}$
	$I_t=\frac{5}{12}a^3t$

Index

Alungire 50
– specifică 49, 204
– – principală 205
– – reală 61
Arc cilindric elicoidal 107
– cu foi 161
Aria de forfecare 158
Axa neutră 146, 236
Axe centrale principale 129

Bare 7
– cotite 29, 32
– curbe 35, 178
– cu secțiune eterogenă 162

Cadre 29
Caracteristici mecanice 53
Centrul de forfecare 176
– – încovoiere 176
Cercul lui Mohr 200
Coeficient de contracție transversală 60
– – ecruisare 63
– – rezistență 63
– – siguranță 67
Compozite armate cu fibre 212
Compresiune 69
Concentrarea tensiunilor 81, 112, 161
Contracția transversală 60
Convenții de semne 16, 41
Criterii de curgere 226
– – rupere 228
Criteriul Coulomb-Mohr 228
– Mohr modificat 229
– Tresca 226
– Tsai-Hill 231
– von Mises 227
Curba caracteristică 57
Curbura 137, 144

Deformații elastice 55
– la încovoiere 167
– permanente 56
– specifice 49
– volumice 209
– – specifice 209
Deplanare 99, 157
Deplasări 51
Diagrame de eforturi 22
– – – în bare cotite 29, 32
– – – – – curbe 36
– – – – – drepte 22
Dimensionarea 71, 95, 141
Direcții principale ale tensiunilor 192
– – de inerție 129
Dualitatea tensiunilor tangențiale 42

Ecruisarea 56
Ecuația diferențială a fibrei medii 168
– lui Poisson 209
Ecuații diferențiale de echilibru 201
– de compatibilitate 52
Eforturi în bare 15
Elasticitatea 12
Energia de deformație 210
– – – de variație a formei 212
– – – – – – volumului 211
– – – la încovoiere 210
– – – la întindere 71
– – – la răsucire 98, 212
Epruvete 53

Factorul de forfecare 158
– lui Bridgeman 64
– de concentrare a tensiunilor 81, 112, 161
Fibra medie deformată 137
Fluxul de forfecare 105
Forfecarea pură 66, 198
Formula lui Bredt 105
– – Juravski 150
– – Navier 139
– – Ramberg-Osgood 59
– – Steiner 127
Forță axială 18
– de lunecare 156
– tăietoare 18

Grinda de egală rezistență 160

Invarianții tensiunilor 193
Ipoteza lui Juravski 151, 176
– secțiunii plane 13
Ipotezele rezistenței materialelor 12

Încercarea la compresiune 64
– la forfecare 64
– la tracțiune 53
Încovoierea 135
– oblică 143
– pură 135
Întinderea 69
– excentrică 235
Întărirea 56
Învelişuri subțiri 46

Lamina ortotropă 213
Legea lui Hooke 52
– – – generalizată 207
Limita de curgere 56
– de elasticitate 55
– de proporționalitate 55
Linii izostatice 200
Lunecarea longitudinală 155
– specifică 50, 205

Metoda secționării 15
Modulul de elasticitate longitudinal 52
– – – secant 58
– – – tangent 58
– – – transversal 52
– – – volumic 210
Modulul de rezistență axial 140
– – – la răsucire 100
– – – polar 95
Modulul de rigiditate la încovoiere 142
– – – la întindere 70
– – – la răsucire 97
Momentul centrifugal 121
Momentul de inerție axial 121
– – – polar 94
– – – principal 130
– de răsucire 18, 91
– încovoietor 18
– static 119

Presiunea de contact 224
Principiul lui Saint-Venant 13
Profile subțiri deschise 101
– – închise 104
Proprietăți secționale echivalente 165

Raza de curbură 137
– – inerție 121
Răsucirea barelor 91
– specifică 93
– profilelor subțiri 101
Relații diferențiale de echilibru 20
– – – – la bare curbe 35
– între eforturi şi tensiuni 42
– între deformații specifice şi deplasări 51
Rezistență admisibilă 67
– la rupere 56
– la tracțiune 56
Rozeta tensometrică 206

Sisteme static nedeterminate 72, 109
Solicitări combinate 235
– simple 18
Stare de tensiuni 188
– – – , plană 195
– – deformații specifice 203
Stratificat simetric 212, 218
Suprafață înclinată 84

Tensiuni 39
– de contact 223
– de forfecare 150
– în bare curbe 178
– normale 40
– octaedrale 193
– principale 197
– reale 61
– tangențiale 40
– termice 74, 221
Teorii de rezistență 223

Unghi de lunecare specifică 50, 205
– – răsucire specifică 93

Vas cilindric 43